COCIENTES E IRRACIONALES FACTORIALES

ISBN: 84-8385-016-8

EXPLICACIÓN AL LECTOR

Con frecuencia sucede que el lector interesado en estos problemas matemáticos tiene el afán de tratar de obtener información sobre los números factoriales, y si éstos pueden formar una función (y=x!) que se exprese en una gráfica (Geometría Analítica).

Es cierto que los denominadores de los coeficientes de los términos del Binomio de Newton se expresan en la forma de números factoriales continuos en una unidad (1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, etc.). Por lo tanto, con éstos se puede construir una gráfica. Sin embargo, entre un número factorial y el que le sigue se describe una sección de curva parabólica, y el siguiente otra sección de curva parabólica, y de la misma manera el que le sigue. Por lo que éstos pueden unirse de modo continuo y así sucesivamente, formando una parábola compleja (compuesta de sucesivas secciones de curvas que se aproximan hacia una recta). En la sección de curva formada por dos números (enteros positivos) factoriales existen sub-secciones de curvas que es imposible que se expresen con números enteros positivos factoriales. Entonces se deben expresar con cualesquiera valores que sean cocientes o irracionales.

Este ensayo matemático intenta brindar una respuesta a esta temática, y además procura dar una explicación sencilla y evidente.

EXPLICACIÓN Y CÁLCULO DE LOS VALORES DE LOS COCIENTES E IRRACIONALES FACTORIALES

Los números factoriales se originan en la expresión de los denominadores del coeficiente de los términos del producto del **binomio de Newton**. El desarrollo del producto del **binomio de Newton** expresado con números factoriales es el siguiente:

$$(a+b)^n = (1/0!)a^n b^0+(n/1!)a^{n-1}b^1+[n(n-1)/2!]a^{n-2}b^2+[n(n-1)(n-2)/3!]a^{n-3}b^3+...$$

Resolviendo los números factoriales y otras expresiones, tenemos que

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+[n(n-1)/2]a^{n-2}b^2+[n(n-1)(n-2)/6]\, a^{n-3}b^3+...$$

El lector podrá observar que el valor del número factorial en la serie anterior corresponde al valor del exponente de la base potencial **b**. Y los números simbolizados como **0!**, **I!**, **2!**, **3!**, **4!**, etc., se denominan números factoriales.

Estos se expresan con los siguientes símbolos con su valor equivalente: **0!=1**, **1!=1**, **2!=Ix2**, **3!=1x2x3**, **4!=1x2x3x4**, **5!=1x2x3x4x5**, etc. El resultado del producto es: **0!=1**, **1!=1**, **2!=2**, **3!=6**, **4!=24**, **5!=120**, etc.

Designemos que **y=x!**. Esta es una función factorial. Los valores de la **x** se designan como números enteros positivos. En la gráfica de la función factorial **y=x!** sólo se utilizan números enteros positivos como valores de la **x**.

¿La función **y=x!** nos permite designar números reales que sean cocientes e irracionales? Por la naturaleza misma de esa función es imposible asignarle a la **x** valores que sean cocientes o irracionales.

Tratemos de construir la gráfica de la función **y=x!** por un sistema de funciones cuya unión nos proporcione la mayor exactitud posible de la gráfica de la función factorial.

Utilicemos como base de la gráfica la función **y=x!** Designemos que los valores de **x** sean **2**, **3**, por lo que los valores de **y** son **y=2, 6**. Con estos valores podemos construir la función parabólica parcial, $\mathbf{y_{(2,\ 3)}=x(x-1)}$.

Cuando los valores de **x** son **3** y **4**, tenemos que **x=3, 4**; **y=6, 24**. Con estos valores obtenemos la función parabólica parcial, $\mathbf{y_{(3,\ 4)}=x(x-1)(x-2)}$. Siguiendo este mismo procedimiento, **x=4, 5**; **y=24, 120**; cuya función parcial es $\mathbf{y_{(4,\ 5)}=x(x-1)(x-2)(x-3)}$.

A continuación le asignamos los dos valores a la **x**, con los resultados respectivos del valor de la **y**, y construimos la función parabólica correspondiente:

x=5, 6; **y=120, 720**; $\mathbf{y_{(5,\ 6)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

x=6, 7; **y=720, 5040**; $\mathbf{y_{(6,\ 7)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$.

x=7, 8; **y=5040, 40320**; $\mathbf{y_{(7,\ 8)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}$.

x=8, 9; **y=40320, 362888**; $\mathbf{y_{(8,\ 9)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}$.

x=9, I0; **y=362880, 3628800**; $\mathbf{y_{(9,10)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)}$.

x=10,11; **y=3628800, 39916800**; $\mathbf{y_{(10,\ 11)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)}$.

x=11, 12; **y=39916800, 479001600**;

$\mathbf{y_{(11,\ 12)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)}$.

x=12, 13; **y=479001600, 6227020800**,

$\mathbf{y_{(12,13)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)}$.

$\mathbf{x=13,14}$; $\mathbf{y=6227020800,\ 87178291200}$;

$\mathbf{y_{(13,14)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}$.

$\mathbf{x=70,\ 71}$, $\mathbf{y_{(70,71)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(\ ...\ )(x-66)x-67)(x-68)(x-69)}$.

$\mathbf{x=(n-1),\ n}$; $\mathbf{y_{(n-1,\ n)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(\ ...\ )[x-(n-4)][x-(n-3)][x-(n-2)]}$.

Las secciones de la curva factorial parcial expresadas por las ecuaciones factoriales correspondientes describen de un modo exacto dichas secciones parciales de la curva factorial. En consecuencia, con las fórmulas de las secciones parciales podemos calcular de un modo exacto los valores comprendidos entre dos números factoriales enteros consecutivos.

Las fórmulas de las secciones de la curva factorial sólo son válidas para cada sección de la curva factorial descrita por cada fórmula. Cada sección parcial de la curva factorial debe ser descrita por dos números enteros positivos consecutivos en una unidad. Y a cada ecuación que describa una sección parcial de curva factorial se le puede asignar cualesquier valor real, ya sea un cociente real positivo o un número irracional real y positivo.

Podemos advertir que la curva factorial se describe como una curva factorial híbrida, es decir como una curva compleja formada por consecutivas secciones de curvas parabólicas parciales, que aumentan de acuerdo al factor **[x-(n-2)]** continuamente. El valor de **n** corresponde al número factorial mayor de la sección de la curva.

Ahora bien, ¿cómo debemos describir la línea factorial cuando en la función **y=x!** los valores de la **x** son **0!**, **1!** y **2!**? La línea factorial debe describirse según sean los valores de **x** y **y**.

Hagamos la descripción de la línea factorial cuando los valores de la **x** son **1!** y **2!**. En este caso tenemos que **x=1!, 2!**; y como **1!=l** y **2!=2**, entonces $\mathbf{y_{(1,\ 2)}=x!}$. Por lo tanto, en todos los valores comprendidos entre **1!** y **2!**, el valor de la **y** es exactamente igual al valor de la **x**. Y la función de la gráfica $\mathbf{y_{(1,\ 2)}=x!}$ es una línea recta con una tangente de $\mathbf{45^0}$. Esta función la expresamos así: $\mathbf{|y_{(1,\ 2)}=x!|=|y_{(1,\ 2)}=x|}$.

Cuando **x=0!, 1!**; y como **0!=l** y **1!=1**, entonces $\mathbf{y_{(0,1)}=1}$; $\mathbf{|y_{(0,\ 1)}=x!|=|y_{(0,\ 1)}=1|}$. De acuerdo a esta descripción de la línea factorial, todos los números reales positivos comprendidos entre los valores de **0!** y **1!** que se le asignen a la **x** determinan que **y=1**. Estos números reales positivos mayores que **0!** y menores que **1!**, pueden ser cocientes o números irracionales.

¿Qué consecuencias están implicadas en estas dos últimas funciones que describen la línea factorial? Que en la función **y=x!**, cuando el valor que se le asigna a **x** es igual o mayor que **0!** e igual o menor que **1!**, el valor de la **y** es igual a **1**. Y cuando el valor que se le asigna a la **x** es igual o mayor que **1!** e igual o menor que **2!**, el valor de **y** es igual al valor de **x**.

Ahora bien, examinemos la igualdad $|y_{(0,\ 1)}=x!|=|y_{(0,\ 1)}=x|$. Sea $n \geq m$ y los valores de **m** y **n** sean números reales positivos, y que $1! \geq m/n \geq 0!$; $x=m/n$; $y_{(0,\ 1)}=(m/n)!$

Si se cumplen las condiciones establecidas, para cualesquier valores que se le asignen al cociente **m/n**, el valor de la **y** es igual a **1**. Por lo tanto, Si $m/n=1/2,\ 1/3,\ 3/4,\ 3/5,\ 99/100,\ (2/3)^{1/2},\ 2^{1/2}/2,\ 2^{1/3}/2^{1/2}$, etc., entonces $y=l$. Es decir, que si $m<n$ y $m/n<1$, luego $(m/n)!=1$, $y=(m/n)!=(l/2)!$, $(1/3)!,\ (3/4)!,\ (3/5)!,\ (99/100)!,\ (2/3)^{1/2}\,!,\ (2^{1/2}/2)!,\ (2^{1/3}/2^{1/2})!,...,=1$.

Consideremos la igualdad $|y_{(1,\ 2)}=x!|=|y_{(1,\ 2)}=x|$. Sea $n>m$ y los valores de la **m** y la **n** números reales positivos, en que $2 \geq n/m \geq l$; $x=n/m$; $y_{(1,\ 2)}=(n/m)!$. Si se cumplen las condiciones establecidas, entonces para cualesquier valores que se le asignen al cociente **n/m**, el valor de la **y** es igual al valor de la **x**. Por lo tanto, si $n/m=3/2,\ 4/3,\ 5/4,\ 1000/999,\ 2^{1/2}/2^{1/3}$, etc., entonces, y $y_{(1,\ 2)}=x!$; por lo que $y_{(1,\ 2)}=(n/m)!=n/m=3/2,\ 4/3,\ 5/4, 1000/999,\ 2^{1/2}/2^{1/3}$, etc.

Y si $n/m>2$, debemos considerar cada sección de la curva factorial definida por dos números enteros positivos consecutivos en una unidad de **x** según sean los valores del cociente **n/m**. Esta sección parcial de la curva factorial se puede expresar del modo más exacto de acuerdo a la fórmula correspondiente. Si $(n/m) \leq a$, y el valor de **a** es un número entero positivo y sea el mínimo mayor que **n/m**, entonces el valor de **a-1** es el mínimo menor que el valor de **n/m**. Por lo tanto la ecuación que describe la sección parcial de curva que comprende el valor de **n/m** define de un modo exacto los valores que se le asignen al cociente **n/m** siempre y cuando $|a-1 \leq n/m| \leq a$. Esta ecuación debe expresarse así: $y_{(a-1,\ a)}=(n/m)!$

Y si $n>2$, se puede aplicar el argumento anterior. Si el valor de **n** no es un número entero positivo ni es un cociente racional, entonces su valor es irracional. En la ecuación que define los valores de **y,** si el valor de **n** es irracional, debe cumplirse la condición de que $|a-1| < l < n < a$. Entonces la ecuación debe expresarse de este modo: $y_{(a-1,\ a)}=n!$

Podemos advertir que cada sección de la curva parcial factorial definida por dos números enteros positivos consecutivos, son equivalentes a la sección de curva parabólica descrita por su ecuación correspondiente. En consecuencia, con las ecuaciones expresadas para cada sección parcial de curva, según como la hemos definido, se pueden calcular con exactitud cualquier número factorial que esté comprendido entre dos números enteros positivos y consecutivos en una unidad.

Si en la función $y=x!$, tenemos que $x=63^{1/2}$, entonces $7<63^{1/2}<8$. La ecuación que expresa de modo exacto el valor de **y** es $y_{(7,\ 8)}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$. Asignando el valor de **x** resulta que $y=36161.83213...$

Y si **x=127/13**; entonces **9<127/13<10**. Asignando los valores a la función correspondiente resulta que

$y_{(9,10)}=127/13(127/13-1)(127/13-2)(127/13-3)(127/13-4)(127/13-5)(127/13-6)(127/13-7)(127/13-+8)$; $y_{(9, 10)}=2289295.3027...$

Cuando $x=9^{1/2}/4$; $2<99^{1/2}/4<3$. La ecuación correspondiente a dicha sección parcial de curva factorial es $y_{(2,3)}=99^{1/2}/4(99^{1/2}/4-1)$; $y_{(2, 3)}=3.700031407...$

Si $x=99^{1/2}/3$; $y_{(3, 4)}=10.1161222746...$

Para **x=68.5**, resulta que **68<68.5<69**.

Para ilustrar esta expresión, tenemos que $68!=2.48003554...x10^{96}$ y $69!=I.711224524...x10^{98}$. Es evidente que el valor de **68.5!** está entre **68!** y **69!**. Resolviendo la ecuación correspondiente de dicha función parcial factorial, tenemos que $y_{(68,69)}=2.320335321...x10^{97}$.

Cuando $x=4759^{1/2}$, luego $y_{(68, 69)}=I.618978893...x10^{98}$.

Con este argumento demostramos e ilustramos con ejemplos evidentes, los números factoriales cuando son cocientes, irracionales y cocientes irracionales.