DEMOSTRACIÓN Y SOLUCIÓN TÉCNICA DE LAS SERIES $S^n=1+2^n+3^n+4^n+5^n+...+t^n$, $S^n=1+3^n+6^n+10^n+15^n+21^n+28^n+…+t^n$ Y OTRAS SIMILARES SUMAMENTE COMPLEJAS

Por: Carlos J. Chuez R. **ISBN 84-8385-016-8**

EXPLICACIÓN AL LECTOR

Puede suceder que algunos estudiosos y personas interesadas en las matemáticas, después de conocer las fórmulas de las sumas de las series aritméticas y geométricas, tengan la curiosidad de tratar de informarse sobre la demostración y el procedimiento para calcular la suma de la serie $\mathbf{S^4}=1+2^4+3^4+4^4+5^4+…+t^4$ u otras series similares y cuyos exponentes sean 5, 6, 7, 8, etc. Sin embargo, resulta algunas veces decepcionante para la persona interesada que al revisar en libros de matemáticas no encuentre los procedimientos que expliquen, demuestren y calculen las fórmulas de las sumas de esas series. Para satisfacer esas inquietudes, expongo en este ensayo el modo de cómo se pudo haber calculado las fórmulas de dichas series cuando el exponente es 4 y 5, y cuando el exponente de las series es 6, 7, 8, 9, 10,…, hasta 31.

También pongo a disposición del lector, el conocimiento de las demostraciones y procedimientos para calcular las fórmulas de las series $\mathbf{S^n}=1+3^n+5^n+7^n+…+t^n$; $\mathbf{S^n}=1+4^n+7^n+10^n+…+t^n$; $\mathbf{S^n}=1+5^n+9^n+13^n+…+t^n$; $\mathbf{S^n}=1+6^n+11^n+16^n+…+t^n$; y otras semejantes. Y finalmente expongo el procedimiento, que es muy complejo, para calcular la fórmula de la suma de $\mathbf{S^n}=1+3^n+6^n+10^n+15^n+21^n+…+t^n$ y otras similares.

Al respecto es necesario señalar que fue a **mediados del siglo XIX** cuando **Agustín Cauchy**, matemático francés, resolvió de un modo sencillo la serie $\mathbf{S^n}=1+2^n+3^n+4^n+5^n…t^n$. Sin embargo, cuando el exponente de dicha serie incrementa su valor, las operaciones para elaborar las fórmulas de las sumas se tornan muy extensas y complicadas.

Para resolver esa dificultad e inconveniente he creado un procedimiento técnico para calcular las fórmulas de las sumas de estas series. Con este procedimiento la fórmula de una suma implica la anterior y la siguiente, y así sucesivamente, mediante ecuaciones progresivas.

Este estudio matemático se compone de cinco partes. **La primera** intenta explicar, con cierta especulación, cómo pudo haber sido que el matemático encontrara el modo de resolver las series $\mathbf{S^4}=1+2^4+3^4+4^4+…+t^4$ y $\mathbf{S^5}=1+2^5+3^5+4^5+…+t^5$. Antes de que se resolvieran estas series, supongo que algunos matemáticos trataron de resolverlas, pero sus intentos resultaron fallidos. Es probable que **Cauchy** conociera la solución de las series $\mathbf{S^2}$ y $\mathbf{S^3}$, y que tuviera la idea de dividir $\mathbf{S^4}$ por $\mathbf{S^2}$ ($\mathbf{S^4/S^2}$) y $\mathbf{S^5}$ por $\mathbf{S^3}$ ($\mathbf{S^5/S^3}$); y así de este modo resolviera la suma de dichas series. Pero para crear la fórmula de la suma de las series $\mathbf{S^6}$ y $\mathbf{S^7}$ tal vez tuvo la idea genial (diríamos la corazonada matemática) de aplicar, de cierto modo, el cálculo infinitesimal.

Y en sus constantes estudios, análisis y reflexiones convirtiera su procedimiento en un método general de solución de las sumas de las series $\mathbf{S^n}$.

La segunda parte (página 6) se refiere a la aplicación y explicación del método de **Cauchy** en las series $\mathbf{S^9}$ y $\mathbf{S^8}$.

La tercera (página 11), trata de un **método técnico, elaborado por cuenta mía, en que se resuelven todas fórmulas de las sumas de las series $\mathbf{S^n}$**. Este procedimiento las vincula a todas entre sí de un modo consecutivo, en que el conocimiento de una permite el conocimiento de la siguiente, y así sucesivamente. **En este procedimiento técnico no es necesaria la aplicación del Cálculo Infinitesimal**.

La cuarta parte (página 21), concierne a la solución de las fórmulas de la suma de las series que son variantes de $\mathbf{S^n}$ como $S^n=1+3^n+5^n+7^n+9^n+\ldots+t^n$, $S^n=1+4^n+7^n+10^n+\ldots t^n$, y otras semejantes.

Y **la quinta** (página 40) se refiere a solución de la suma de la serie $\mathbf{S^n}=1+3^n+6^n+10^n+15^n+21^n+\ldots+t^n$ y otras que son variantes, en que se aplica el **Cálculo Infinitesimal**.

Advertencia. Si al lector le resultara un poco tedioso o molesto el estudio de la primera y cuarta parte de este texto, le sugiero amablemente que revise la segunda, tercera y quinta parte de esta investigación y reflexión matemática. Además, le solicito que si posee una calculadora que tenga la capacidad de programar, que pruebe las fórmulas de la suma de las series que propongo con la finalidad de que verifique o pruebe la validez de éstas.

PRIMERA PARTE

DEMOSTRACIÓN Y EXPLICACIÓN DE LAS SERIES $S^{n=4}=1+2^4+3^4+4^4+5^4+\ldots+t^4$

Es posible que el matemático para calcular la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{S^{n=4}}_t=1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+t^4$, lo hizo aplicando este procedimiento, dividió $\mathbf{S^{n=4}}$ por $\mathbf{S^{n=2}}$. Como la ecuación de la suma de los términos de la serie $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+t^2$ es $\mathbf{S^{n=2}_t=t(2t+1)(t+1)/6}$, entonces de $\mathbf{S^{n=2}_t}$ formó una suma consecutiva de términos expresada del siguiente modo: $\mathbf{S^{n=2}}_t=1$, $(1+2^2)$, $(1+2^2+3^2)$, $(1+2^2+3^2+4^2)$, $(1+2^2+3^2+4^2+5^2)$, $(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$, $(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)$, $(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2)$, $(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2)$, $(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2)$… Del resultado de las sumas, tenemos que $\mathbf{S^{n=2}_t}$=1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385,…

Efectuando el mismo procedimiento con $\mathbf{S^{n=4}_t}$, tenemos que $\mathbf{S^{n=4}_t}$=1, 17, 98, 354, 979, 2275, 4676, 8772, 15333, 25333,…Ahora formemos la división $\mathbf{S^{n=4}_t/S^{n=2}_t}$, dividiendo de modo continuo las sumas correspondientes de términos. Y designemos $\mathbf{P^{n=4}_t}$ la serie así formada. Luego, $\mathbf{P^{n=4}_t}$=1/1, 17/5, 98/14, 354/30, 979/55, 2275/91, 4676/140, 8772/204, 15333/285, 25333/385,…; $\mathbf{P^{n=4}_t}$=1, 3.4, 7, 11.8, 17.8, 25, 33.4, 43, 53.8, 65.8… Para eliminar los términos con decimales multipliquemos esta serie por 5/5, por lo que $\mathbf{P^{n=4}_t}$=(5, 17, 35, 59, 89, 125, 167, 215, 269, 329,…)/5. Ahora para calcular la suma de esta serie, formemos una diferencia continua de los términos consecutivos de $\mathbf{P^{n=4}_t}$. Ejecutando la operación indicada, tenemos que $\mathbf{P^{n=4}_t}$=(17-5, 35-17, 59-35, 89-59, 125-89, 167-125, 215-167, 269-215, 329-269,…)/5; $\mathbf{P^{n=4}_t}$=12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60,…,t)/5; Es evidente que todos los términos se factorizan por 6. Efectuando la operación resulta que, $\mathbf{P^{n=4}_t}$=6(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,…)/5

Es evidente que la serie $\mathbf{P^{n=4}_t}$ es aritmética. Por consiguiente, la fórmula de los términos de la serie $\mathbf{P^{n=4}_t}$ la expresamos así: $\mathbf{P^{n=4}_t}=(3t^2+3t-6)/5+5/5$; $\mathbf{P^{n=4}_t}=(3t^2+3t-1)/5$. Como $\mathbf{S^{n=4}_t}=(\mathbf{S^{n=2}_t})(\mathbf{P^{n=4}_t})$, por lo tanto, $\mathbf{S^{n=4}_t=t(2t+1)(t+1)(3t^2+3t-1)/30}$.

Para calcular la fórmula de la suma de los términos de la serie $S^{n=5}_t=1+2^5+3^5+4^5+\ldots t^5$, dividimos ésta por $S^{n=3}_t=1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+t^3$. Como $S^{n=3}_t=[(t(t+1)/2]^2$, aplicando el procedimiento anterior, tenemos que $S^{n=5}_t=[t(t+1)/2]^2(2t^2+2t-1)/3$.

La fórmula de la suma de la serie $S^{n=7}_t=1+2^7+3^7+4^7+\ldots+t^7$, la calculamos, en primer lugar con el procedimiento que aplicamos para formar las de $S^{n=4}_t$ y $S^{n=5}_t$; y, en segundo lugar, aplicando el procedimiento de Cauchy.

Tenemos que $\mathbf{S^{n=3}_t}$=1, 9, 36, 100, 225, 441, 784, 1296, 2025, 3025…; y $\mathbf{S^{n=7}_t}$=1, 129, 2316, 18700, 96825, 376761, 1200304, 3297456, 8080425, 18080425,… Dividamos $\mathbf{S^{n=7}_t}$ por $\mathbf{S^{n=3}_t}$ de un modo continuo con sus términos correspondientes, y designemos la serie así formada $\mathbf{A^{n=7}_T}$. Este primer procedimiento finaliza hasta que esta serie se convierta en aritmética. A continuación resulta que $\mathbf{A^{n=7}_T}$=1, 43/3, 193/3, 187, 1291/3,… Multiplicando los términos por 3/3, obtenemos este resultado: $\mathbf{A^{n=7}_T}$=(3, 43, 193, 561, 1291, 2563, 4593, 7633, 11971, 25873,…)/3. Si multiplicamos la serie por 2/2, tenemos que **$A^{n=7}$**=[6, 86, 386, 1122, 2582, 5126,…]/6.

Ahora, para calcular la fórmula de la suma de esta serie, formemos una diferencia continua de sus términos consecutivos. Por lo que **$A^{n=7}{}_T$**=(43-3, 193-43, 374-193, 1291-374, 2563-1291,…)/3; **$A^{n=7}{}_T$**=(40, 150, 368, 730, 1272, 2030, 3040, 4338, 5960, 7942, 10320,…)/3.

Luego construyamos otra serie formada por la diferencia continua de los términos consecutivos, entonces **$A^{n=7}{}_T$**=(150-40, 368-150, 730-368, 1272-730,…)/3; **$A^{n=7}{}_T$**=(110, 218, 362, 542, 758, 1010, 1298, 1622, 1982, 2378, 2810,…)/3.

A continuación, hagamos otra serie constituida por la diferencia continua de los términos consecutivos. Por lo que, **$A^{n=7}{}_T$**=(218-110, 362-218, 542-362, 758-542, 1010-758, 1298-1010, 1622-1298, 1982-1622, 2378-1982, 2810-2378,…)/3; **$A^{n=7}{}_T$**=(108, 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360, 396, 432,…)/3. Como todos los términos se factorizan por 36, y efectuando la simplificación, tenemos que **$A^{n=7}{}_T$**=12(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,…).

Es evidente que la serie anterior es aritmética, y que los términos de **$A^{n=7}{}_T$** son diferencias consecutivas de los términos, en que el primer término se resta del segundo, éste del tercero, y así sucesivamente.

La fórmula de los términos de la serie **$A^{n=7}{}_T$** la expresamos del siguiente modo: **$A^{n=7}{}_T$**=(1/3)(18T^2+18T-108)+110/3; **$A^{n=7}{}_T$**=(18T^2+18T+2)/3. Para que los términos sucesivos de la serie sean válidos, el valor de la **T** debe ser sustituida por (t+1). Por lo que **$A^{n=7}{}_T$** se modifica así: **$A^{n=7}{}_t$**=[18$(t+1)^2$+18(t+1)+2]/3. Y efectuando las operaciones requeridas, tenemos que **$A^{n=7}{}_t$**=(18t^2+54t+38)/3. Si multiplicamos esta fórmula por **$S^{n=3}{}_t$** es imposible que este producto resuelva la suma de la serie **$S^{n=7}{}_t$**. Tal vez este fue el problema que indujo a **Cauchy** a aplicar el **Cálculo Infinitesimal** para resolverlo, después de incesantes e intensos análisis y meditaciones matemáticas.

En segundo lugar, para calcular los términos de la suma de la serie **$A^{n=7}{}_t$**, se aplica el método de **Cauchy** en la siguiente operación que consiste en una integración parcial.

Tenemos que **$A^{n=7}{}_t$**=(18t^2+54t+38)/3 (**1a**). Para obtener el **primer término** de la fórmula de **$A^{n=7}{}_t$**, obviando el denominador (3), multiplicamos el primer término del numerador de **$A^{n=7}{}_t$** por **dt**. Efectuando la integración, tenemos que **$\int 18t^2dt=6t^3$**.

Del término **$6t^3$** incrementamos el valor de **t** en una unidad. Por lo que $6(t+1)^3=6t^3+18t^2+18t+6$ (**2a**). Luego al restarle $6t^3$ a la ecuación (**2a**), tenemos que $6t^3+18t^2+18t+6-6t^3=18t^2+18t+6$ (**3a**).

Para obtener el **segundo término** de la fórmula de **$A^{n=7}{}_t$**, multiplicamos 54t del numerador de (**1a**) por **dt**. La integral es **$\int 54tdt=27t^2$**. De la ecuación (**3a**), multiplicamos 18t por **dt**, cuya integral es $\mathbf{9t^2}$. Luego restamos éste del otro, es decir, $27t^2-9t^2=\mathbf{18t^2}$. Éste es el **segundo término** del numerador de la fórmula de $\mathbf{A^{n=7}{}_t}$.

Al término $\mathbf{18t^2}$, incrementamos el valor de la **t** en una unidad, obteniendo este resultado: $18(t+1)^2=18t^2+36t+18$ (**4a**). Al restarle a (**4a**) $18t^2$, tenemos $18t^2+36t+18-18t^2=36t+18$ (**5a**). Y la suma de (**5a**) y (**3a**) es $18t^2+54t+24$ (**6a**).

De ahora en adelante, las operaciones para calcular los correspondientes términos de las series se harán siguiendo los pasos de este procedimiento.

El **tercer término** de la fórmula de $\mathbf{A^{n=7}{}_t}$ se obtiene del siguiente modo: Se Multiplica por **dt** los últimos términos del numerador de (**1a**) y (**6a**). Integramos, y restamos el segundo término del primero, $38t-24t=\mathbf{14t}$.

Del término **14t** se incrementa el valor de la **t** en una unidad, resultando $14(t+1)=14t+14$ (**7a**). Al restarle 14t a (**7a**), tenemos $14t+14-14t=14$ (**8a**). Entonces a (**8a**) se le suma (**6a**), lo que resulta $18t^2+54t+24+14=18t^2+54t+38$ (**9a**). Si se agrega el denominador 3 a (**9a**) es evidente que (**9a**)/3 es igual a (**1a**). Como resultado de estas operaciones falta el **cuarto término**.

El **último término** de $\mathbf{A^{n=7}{}_t}$ es una constante. Adicionemos los términos de la fórmula de $\mathbf{A^{n=7}{}_t}$ obtenidos hasta ahora. Y sumémosle **x**, e igualemos la suma en 40, que es el primer término de la primera de las sustracciones continuas de la serie de $\mathbf{A^{n=7}{}_T}$. Esta igualdad sólo es válida, si **t=1**. Por lo que $(6t^3+18t^2+14t+\mathbf{x}=40)/3$.

Efectuando las operaciones requeridas, resulta que **x=2**. Éste valor es el último término de esta fórmula de $\mathbf{A^{n=7}{}_t}$. Por consiguiente, $\mathbf{A^{n=7}{}_t}=(6t^3+18t^2+14t+2)/3$.

A continuación, las operaciones que se efectúen para calcular el **último término** de la fórmula de la suma de los términos de series semejantes se harán según el procedimiento que se ha aplicado.

Para calcular la fórmula de la suma de los términos de la serie $\mathbf{A^{n=7}{}_t}$, se utilizará el mismo procedimiento que se ha ejecutado para obtener sus términos. Para calcular el valor completo de esta fórmula se debe efectuar otra operación aplicando el Cálculo Infinitesimal porque así lo implica el valor potencial de la **t**.

Tenemos que $\mathbf{A^{n=7}{}_t}=(6t^3+18t^2+14t+2)/3$ (**1b**). Pero para evitar las operaciones con coeficientes fraccionales, multiplicamos $\mathbf{A^{n=7}{}_t}$ por 2/2. Entonces, $\mathbf{A^{n=7}{}_t}=(12t^3+36t^2+28t+4)/6$ (**2b**).

El **primer término** del numerador de la fórmula de $\mathbf{A^{n=7}{}_t}$, lo obtenemos así: Obviando el denominador 6, multiplicamos 12 t^3 por **dt**, y lo integramos, $\mathbf{\int 12t^3dt=3t^4}$.

Al incrementar el valor de la **t** en una unidad del término $\mathbf{3t^4}$, tenemos que $3(t+1)^4=3t^4+12t^3+18t^2+12t+3$ (**3b**). Y restándole $3t^4$ a (**3b**), resulta que $3(t+1)^4-3t^4=12t^3+18t^2+12t+3$ (**4b**).

De (**2b**) y (**4b**), multiplicamos los términos $36t^2$ y $18t^2$ por **dt**. Los integramos y restamos el segundo del primero, de lo resulta $12t^3-6t^3=\mathbf{6t^3}$. Éste es el **segundo término** del numerador de la fórmula de $\mathbf{A^{n=7}_t}$.

Del término $6t^3$ incrementamos el valor de la **t** en una unidad, y le restamos $6t^3$, es decir $6(t+1)^3-6t^3=18t^2+18t+6$ (**5b**). Sumando (**5b**) y (**4b**), resulta $12t^3+36t^2+30t+9$ (**6b**). Los términos 28t y 30t de (**2b**) y (**6b**) los multiplicamos por **dt**, y extraemos sus integrales. Y restando el segundo del primero, resulta que $14t^2-15t^2=\mathbf{-t^2}$. Éste es el **tercer término** de la fórmula de $\mathbf{A^{n=7}_t}$.

Del término $\mathbf{-t^2}$ incrementamos el valor de **t** en una unidad, y le restamos $\mathbf{-t^2}$, o sea que $-(t+1)^2-(-t^2)=-2t-1$ (**7b**). De la suma de (**7b**) y (**6b**), tenemos $12t^3+36t^2+30t+9+(-2t-1)$; $12t^3+36t^2+28t+8$ (**8b**). Los términos 4 y 8 de (**2b**) y (**8b**) los multiplicamos por **dt**, y determinamos sus integrales, $\boldsymbol{\int(4dt-8dt)=-4t}$. Éste el **cuarto término** del numerador de la fórmula de $\mathbf{A^{n=7}_t}$.

Al término -4t incrementamos el valor de la **t** en una unidad y le restamos -4t, es decir $[-4(t+1)-(-4t)=-4]$ (**9b**). Sumando (**9b**) y (**8b**), resulta $12t^3+36t^2+28t+4$ (**10b**). Es evidente que los términos de las ecuaciones (**10b**)/3 y (**2b**) son iguales.

El **último término** de la fórmula de $\mathbf{A^{n=7}_t}$ lo obtenemos de $3t^4+6t^3-t^2-4t+\mathbf{x}=6$, pero sólo si t=1. Despejando, resulta que **x**=**2**. Entonces $\mathbf{A^{n=7}_t=(3t^4+6t^3-t^2-4t+2)/6}$ (**11b**) que es la conclusión de su valor potencia. El **número 6** que es la suma de la ecuación, corresponde al primer término de la división de las series $\mathbf{S^7}$ y $\mathbf{S^3}$, ($\mathbf{S^7/S^3}$). Y como $\mathbf{S^{n=7}_t}=(\mathbf{S^{n=3}_t})(\mathbf{A^{n=7}_t})$, por lo tanto, $\mathbf{S^{n=7}_t=[t(t+1)/2]^2(3t^4+6t^3-t^2-4t+2)/6}$ (**12b**).

Para construir la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{S^{n=6}_t}$, dividimos ésta por $\mathbf{S^{n=2}_t}$. Como $\mathbf{S^{n=2}_t}=1+2^2+3^2+{}^24+\ldots+t$, cuya fórmula es $\mathbf{S^{n=2}_t=t(2t+1)(t+1)/6}$, y utilizando el mismo procedimiento que aplicamos para calcular la ecuación de $\mathbf{S^{n=7}_t}$, tenemos que $\mathbf{S^{n=6}_t=[t(2t+1)(t+1)/6](3t^4+6t^3-3t+1)/7}$ (**13b**). $\mathbf{S^{n=6}_t=t(2t+1)(t+1)(3t^4+6t^3-3t+1)/42}$.

SEGUNDA PARTE

SOLUCIÓN DE LA SERIE $\mathbf{S^{n=9}_t=1+2^9+3^9+4^9+5^n+\ldots+t^9}$

Si aplicáramos el método que utilizamos para elaborar la fórmula de la suma de los términos de la serie $\mathbf{S^{n=7}_t}$ a la serie $\mathbf{S^n_t}=1+2^n+3^n+{}^n4+\ldots+t^n$, las operaciones se harían muy complicadas y extensas, porque el exponente **n** se incrementa sucesivamente. Por ejemplo, cuando **n**=27, tendríamos que efectuar veintidós operaciones para obtener la ecuación de la serie $\mathbf{S^{n=27}_t}$, aparte de la fórmula de la serie aritmética. Procedemos a continuación, ejecutar el procedimiento adecuado y directo del **método de Cauchy** para calcular los términos de la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{S^{n=9}_{t}}$.

Advertimos al lector que Agustín Luis Cauchy (1789-1857), matemático francés, fue el creador del método para calcular las fórmulas de la suma de las series $\boldsymbol{S^{n}_{t}}$.

El procedimiento para calcular la fórmula de la suma de los términos de dicha serie se inicia con el **Binomio de Newton multiplicado por la derivada del término**: $\mathbf{A^{n=9}_{t}=(t+1)^{9}dt}$.

Desarrollando el binomio tenemos que

$\mathbf{A^{n=9}_{t}=(t^{9}+9t^{8}+36t^{7}+84t^{6}+126t^{5}+126t^{4}+84t^{3}+36t^{2}+9t+1)dt}$ (**1c**).

Para facilitar las operaciones siguientes, multipliquemos $\mathbf{A^{n=9}_{t}}$ por **20/20**. Por lo que

$\mathbf{A^{n=9}_{t}}=(20t^{9}+180t^{8}+720t^{7}+1680t^{6}+2520t^{5}+2520t^{4}+1680t^{3}+720t^{2}+180t+20)\mathbf{dt}/20$ (**2c**).

Para calcular el **primer término** de la fórmula de $\mathbf{S^{n=9}_{t}}$ se separa el primer término de $\mathbf{A^{n=9}_{t}}$ y se integra: $\int \mathbf{20t^{9}dt/20}$, cuyo valor es $\underline{\mathbf{2t^{10}/20}}$.

Del término $\mathbf{2t^{10}/20}$ se incrementa el valor de **t** en una unidad, se resta el término y la diferencia se multiplica por **dt**. Por lo que tenemos el siguiente resultado,

$[2(t+1)^{10}-2t^{10}]\mathbf{dt}/20=[20t^{9}+90t^{8}+240t^{7}+420t^{6}+504t^{5}+420t^{4}+420t^{3}+90t^{2}+20t+2]\mathbf{dt}/20$ (**3c**).

El **segundo término** del numerador de la fórmula de $\mathbf{S^{n=9}_{t}}$ se obtiene integrando el segundo término de (**2c**): $\int \mathbf{180t^{8}dt/20=20t^{9}/20}$; y el segundo término de (**3c**): $\int \mathbf{90t^{8}dt/20=10t^{9}/20}$. Restando el segundo del primero, resulta $\underline{\mathbf{10t^{9}/20}}$.

Del término $\mathbf{10t^{9}/20}$ se incrementa el valor de la **t** en una unidad, se resta el término, y la diferencia se multiplica por **dt**. Por lo que,

$[10(t+1)^{9}-10t^{9}]\mathbf{dt}/20=[90t^{8}+360t^{7}+840t^{6}+1260t^{5}+1260t^{4}+840t^{3}+360t^{2}+90t+10]\mathbf{dt}/20$ (**4c**).

Luego, (**4c**) y (**3c**) se suman, y tenemos

$[20t^{9}+180t^{8}+600t^{7}+1260t^{6}+1764t^{5}++1680t^{4}+1080t^{3}+450t^{2}+110t+12]\mathbf{dt}/20$ (**5c**).

A continuación simplificamos el procedimiento de las operaciones para calcular los términos siguientes de la fórmula de la suma de $\mathbf{S^{n=9}_{t}}$.

El **tercer término** del numerador de la fórmula de $\mathbf{S^{n=9}_{t}}$ se obtiene integrando $\int \mathbf{720t^{7}dt/20=90t^{8}/20}$ de (**2c**) y $\int \mathbf{600t^{7}dt/20=75t^{8}/20}$ de (**5c**), y restando el segundo del primero, valor es $\underline{\mathbf{15t^{8}/20}}$.

Del término $\mathbf{15t^{8}/20}$ incrementamos el valor de la **t** en una unidad, restamos el término y la diferencia la multiplicamos por **dt**; por lo que

$[15(t+1)^8-15t^8]$**dt**/20=$[120t^7+420t^6+840t^5+1050t^4+840t^3+420t^2+120t+15]$**dt**/20 (**6c**). De la suma de (**6c**)+(**5c**), resulta

$(20t^9+180t^8+720t^7+1680t^6+2604t^5+2730t^4+1920t^3+870t^2+230t+27)$**dt**/20 (**7c**).

Integremos **$\int 2520t^5dt/20=420t^6/20$** de (**2c**) y **$\int 2604t^5dt/20=434t^6/20$** de (**7c**), y restemos el segundo del primero, el resultado es **$\underline{-14t^6/20}$**. Este es el **cuarto término** de **$S^{n=9}_t$.**

Del término **$-14t^6/20$** incrementemos el valor de la **t** en una unidad, restémosle el término y multipliquemos la diferencia por **dt**,

$[-14(t+1)^6-(-14t^6)]$**dt**/20=$(-84t^5-210t^4-280t^3-210t^2-84t-14)$**dt**/20 (**8c**). Luego,

(**8c**)+(**7c**)= $(20t^9+180t^8+720t^7+1680t^6+2520t^5+2520t^4+1640t^3+660t^2+146t+13)$**dt**/20 (**9c**).

Al integrarse **$\int 1680t^3dt/20=420t^4/20$** de (**2c**) y **$\int 1640t^3dt/20=410t^4/20$** de (**9c**), y restarse el segundo del primero, resulta **$\underline{10t^4/20}$**. Éste es el **quinto término** de la fórmula de **$S^{n=9}_t$.**

Del término **$10t^4/20$** se incrementa el valor de la **t** en una unidad, restando el término y multiplicamos la diferencia por **dt**, tenemos que $[10(t+1)^4-10t^4=40t^3+60t^2+40t+10]$**dt**/20 (**10c**). Sumando (**10c**)+(**9c**), resulta

$(20t^9+180t^8+720t^7+1680t^6+2520t^5+2520t^4+1680t^3+720t^2+186t+23)$**dt**/20 (**11c**).

La diferencia de las integrales de **$\int 180tdt/20=90t^2/20$** de (**2c**) y de **$\int 186tdt/20=93t^2/20$** de (**11c**) es **$\underline{-3t^2/20}$**. Éste es el **sexto término** de la fórmula de **$S^{n=9}_t$.**

Del término **$-3t^2/20$** se incrementa el valor de la **t** en una unidad, restándole el término y multiplicando la diferencia por **dt**, tenemos que $[-3(t+1)^2-(-3t^2)]$**dt**/20=$(-6t-3)$**dt**/20 (**12c**). De la suma de (**12c**) y (**11c**), se obtiene

$(20t^9+180t^8+720t^7+1680t^6+2520t^5+2520t^4+1680t^3+720t^2+180t+20)$**dt**/20 (**13c**). Es evidente que los términos de (**13c**) y (**2c**) son exactamente iguales.

En este procedimiento, el cálculo de los términos de la serie S^n_t concluye cuando las sumas sucesivas de las diferencias de los términos alcanzan la igualdad de los términos de la serie A^n_t.

Sumandos los términos calculados, resulta **$S^{n=9}_t=(2t^{10}+10t^9+15t^8-14t^6+10t^4-3t^2)/20$** (**14c**). Y simplificando, **$S^{n=9}_t=t^2(2t^8+10t^7+15t^6-14t^4+10t^2-3)/20$** (**15c**), que es la fórmula de la suma de los términos de la serie correspondiente.

La fórmula (**15c**) que ha sido elaborada directamente del polinomio (**1c**) tiene la siguiente expresión: **$S^{n=9}_t=t^2(t^8/10 + t^7/2 + 3t^6/4 -7t^4/10 + t^2/2 - 3/20)$** (**16c**), que es igual a la (**14c**). Sin embargo, advertimos al lector que pudiera ser muy complicado operar con fracciones para calcular los términos de la fórmula **S_9**. Lo más cómodo en la formulación de ésta, es que en las operaciones del cálculo de los términos evitemos el uso de complicadas fracciones innecesarias, procurando utilizar las requeridas.

A continuación, calcularemos directamente los términos de la fórmula de la suma de los términos de la serie $\mathbf{S_8}=1+2^8+3^8+4^8+\ldots+t^8$ (**1d**). Y para ello efectuaremos las operaciones requeridas.

Designemos que $\mathbf{A^{n=8}_t=90(t+1)^8dt/90}$, por lo que

$\mathbf{A^{n=8}_t=(90t^8+720t^7+2520t^6+5040t^5+6300t^4+5040t^3+2520t^2+720t+90)dt/90}$ (**2d**).

Del primer término de la serie $\mathbf{A^{n=8}_t}$ se determina la integral $\int\mathbf{90t^8dt/90=10t^9/90}$. Éste es el **primer término** de la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{S^{n=8}_t}$.

Del término $\mathbf{10t^9/90}$ se incrementa el valor de la **t** en una unidad, se le restamos el término multiplicando la diferencia por **dt**, por lo que

$[10(t+1)^9-10t^9]\mathbf{dt}/90=(90t^8+360t^7+840t^6+1260t^5+1260t^4+840t^3+360t^2+90t+10)\mathbf{dt}/90$ (**3d**).

De los segundos términos de (**2d**) y (**3d**) se determinan sus integrales, $\int\mathbf{720t^7dt/90=90t^8/90}$ y $\int\mathbf{360t^7dt/90=45t^8/90}$. Luego se resta el segundo del primero, $(90t^8-45t^8)/90=\mathbf{45t^8/90}$. Éste es el **segundo término** de la fórmula de $\mathbf{S^{n=8}_t}$.

Del término $\mathbf{45t^8/90}$ se incrementa el valor de la **t** en una unidad, luego se resta el término inicial y se multiplica la diferencia por **dt**. Por lo que

$[45(t+1)^8-45t^8]\mathbf{dt}/90=(360t^7+1260t^6+2520t^5+3150t^4+2520t^3+1260t^2+360t+45)\mathbf{dt}/90$ (**4d**).

Y efectuando la siguiente suma, tenemos,

(**3d**)+(**4d**)$=(90t^8+720t^7+2100t^6+3780t^5+4410t^4+3360t^3+1620t^2+450t+55)\mathbf{dt}/90$ (**5d**).

De los terceros términos de (**2d**) y (**5d**) se calculan sus integrales, por lo que $\int\mathbf{2520t^6dt/90=360t^7/90}$ y $\int\mathbf{2100t^6dt/90=300t^7/90}$. Luego se resta el segundo del primero, $\mathbf{360t^7/90}$-$\mathbf{300t^7/90}$=$\mathbf{60t^7/90}$. Éste es el **tercer término** de la fórmula de $\mathbf{S^{n=8}_t}$.

Del término $\mathbf{60t^7/90}$ se incrementa el valor de la **t** en una unidad, se resta el término inicial multiplicando la diferencia por **dt**. Por consiguiente,

$[60(t+1)^7\mathbf{dt}/90-60t^7\mathbf{dt}/90]=(460t^6+1260t^5+2100t^4+2100t^3+1260t^2+420t+60)\mathbf{dt}/90$ (**6d**).

Realizando la siguiente suma, resulta que

(**5d**)+(**6d**)$=(90t^8+720t^7+2520t^6+5040t^5+6510t^4+5460t^3+2880t^2+870t+115)\mathbf{dt}/90$ (**7d**).

Como la **diferencia** de los **cuartos términos** de (**2d**) y (**7d**) es **cero**, le corresponde a los **quintos términos** de (**2d**) y (**7d**) que se calculen sus integrales. Por lo que

$\int$**$6300t^4dt/90=1260t^5/90$** y $\int$**$6510t^4dt/90=1302t^5/90$**. Y restando el segundo del primero, tenemos **$1260t^5/90$-$1302t^5/90=-42t^5/90$** Éste es el **cuarto término** de la fórmula de la suma de la serie **$S^{n=8}_t$.**

Del término **$-42t^5/90$** se incrementa el valor de la **t** en una unidad, se le resta el término inicial multiplicando la diferencia por **dt**. Por consiguiente,

$[-42(t+1)^5-(-42t^5)]$**dt**$/90=-(210t^4+420t^3+420t^2+210t+42)$**dt**/90 (**8d**). Y ejecutando la siguiente suma tenemos que

(**7d**)+(**8d**)=$(90t^8+720t^7+2520t^6+5040t^5+6300t^4+5040t^3+2460t^2+660t+73)$**dt**/90 (**9d**).

Como los **sextos términos** de (**2d**) y (**9d**) son iguales, su **diferencia** es **cero**. Por consiguiente, a los **séptimos términos** de (**2d**) y (**9d**) se les debe determinar sus integrales. Por lo que $\int$**$2520t^2dt/90=840t^3/90$** y $\int$**$2460t^2dt/90=820t^3/90$**. Y restando el segundo del primero, tenemos que $840t^3/90-820t^3/90=$**$20t^3/90$**. Éste es el **quinto término** de la fórmula de **$S^{n=8}_t$.**

Del término **$20t^3/90$** se incrementa el valor de la **t** en una unidad, se le resta el término inicial y se multiplica la diferencia por **dt**. Por consiguiente,

$[20(t+1)^3$**dt**$-20t^3$**dt**$]/90=(60t^2+60t+20)$**dt**/90 (**10d**). Resolviendo la suma, tenemos

(**9d**)+(**10d**)=$(90t^8+720t^7+2520t^6+5040t^5+6300t^4+5040t^3+2520t^2+720t+93)$**dt**/90 (**11d**).

Como los **octavos términos** de (**2d**) y (**11d**) son iguales, su **diferencia** es **cero**. Por lo tanto a los novenos término de (**2d**) y (**11d**) se les deben calcular sus integrales. Entonces $\int$**90dt/90=90t/90** y $\int$**93dt/90=93t/90**. Y restando el segundo del primero, tenemos que **90t/90-93t/90**=**-3t/90**. Éste es el **sexto término** de la fórmula de **$S^{n=8}_t$.**

Del término **-3t/90** se incrementa el valor de la **t** en una unidad, se le resta el término multiplicando la diferencia por **dt**. Luego, $[-3(t+1)$**dt**$/90-3t$**dt**$/90]=$**-3dt/90** (**12d**). Efectuando la siguiente suma, resulta que

(**11d**)+(**12d**)=$(90t^8+720t^7+2520t^6+5040t^5+6300t^4+5040t^3+2520t^2+720t+90)$**dt**/90=**$A^{n=8}_t$** (**13d**).

Es evidente que los términos de (**13d**) y (**2d**) son exactamente iguales, por lo concluye el procedimiento para obtener los términos de la suma de la serie de **$S^{n=8}_t$.** En consecuencia, la fórmula es:

$S^{n=8}_t=t(10t^8+45t^7+60t^6-42t^4+20t^2-3)/90$ (**14d**).

Señalamos que todas las fórmulas pares mayores que **2** de **S^n_t**, son divisibles por **$S^{n=2}_t$**; y todas las impares mayores que **3**, son divisibles por **$S^{n=3}_t$.**

TERCERA PARTE

SOLUCIÓN TÉCNICA DE LAS FÓRMULAS DE LA SUMA DE LA SERIE S^n_t

El método que se ha implementado para elaborar las fórmulas de las sumas de las series de $\mathbf{S^{n=8}_t}$ y $\mathbf{S^{n=9}_t}$ es una generalización del método que se aplica para construir las fórmulas de $\mathbf{S^{n=4}_t}$, $\mathbf{S^{n=5}_t}$, $\mathbf{S^{n=6}_t}$ y $\mathbf{S^{n=7}_t}$. Sin embargo, en la medida en que el valor del exponente de las series de $\mathbf{S^n_t}$ aumenta como número entero positivo, el crecimiento de las operaciones se torna sumamente extenso y complicado. Para obviar esta dificultad, ***propongo un sencillo procedimiento técnico para elaborar los términos de las fórmulas de las sumas de las series de S^n_t.***

Para concretar ese objetivo he confeccionado una **Tabla de Valores**, por medio de la cual se pueden calcular los términos de las fórmulas de $\mathbf{S^n_t}$ según sea el valor del exponente. Esta **Tabla** la elaboro de acuerdo a la disposición de los términos de las fórmulas de $\mathbf{S^{n=8}_t}$ y $\mathbf{S^{n=9}_t}$, y de otras que he investigado.

La disposición de este ordenamiento es la siguiente (**ver Tabla de Valores**): Los tres primeros términos son positivos. El primer término del valor del exponente de la **t** es mayor en una unidad que los exponentes de los primeros términos de las sumas de las series de $\mathbf{S^n_t}$. Por ejemplo, en el caso de $\mathbf{S^n_t}$, el exponente de la **t** en el primer término es **n+1**; en el segundo es **n**, y en el tercero es **n-1**. En el cuarto término, el valor del coeficiente de la **t** es negativo; en el quinto, positivo; en el sexto, negativo; y el séptimo, positivo, y así sucesivamente. El valor del exponente de la **t** del cuarto término disminuye dos unidades con respecto al tercero. En el quinto término, el valor del exponente disminuye en dos unidades con respecto al cuarto, y así sucesivamente. En la fórmula de $\mathbf{S^n_t}$, el denominador contiene el coeficiente del primer término de la **t**, que es el valor de su exponente.

¿**Cómo deben elaborarse las fórmulas de los términos de las sumas de la serie de $\mathbf{S^n_t}$, según esta Tabla de Valores**?

En primer lugar, cada fórmula de $\mathbf{S^n_t}$, de acuerdo como sea el valor de la **n**, tiene un número determinado de términos. Cuando **n** es par, el número de términos se determina según la ecuación $\mathbf{N_p}$=(**n**+4)/2. En que $\mathbf{N_p}$ indica la cantidad de términos que tiene la fórmula $\mathbf{S^n_t}$, y **n** es el exponente de la serie. Y si **n** es impar, el número de términos se calcula con la ecuación $\mathbf{N_i}$=(**n**+3)/2. En que $\mathbf{N_i}$ expresa la cantidad de términos de la fórmula $\mathbf{S^n_t}$. Según la ecuaciones $\mathbf{N_p}$ y $\mathbf{N_i}$, el número de términos de la fórmula par es igual al de la impar consecutiva.

En segundo lugar, los coeficientes de los términos de las fórmulas de $\mathbf{S^n_t}$ pueden ser fracciones propias e impropias. Para evitar estas fracciones, se multiplican y se dividen los términos de la fórmula $\mathbf{S^n_t}$ por los factores requeridos. Como la fórmula de los términos de la suma de la serie de $\mathbf{S^n_t}$ es $\mathbf{A^n_t}=(t^n+nt^{n-1}+n(n+1)^{n-2}t/2+\ldots)$**dt**, la integral del primer término es

$\int t^n dt = t^{n+1}/n$. Y si en las operaciones en que se determinan los términos de la fórmula de la suma de la serie S_n, se originan tantas fracciones, éstas deben multiplicarse y dividirse por los mismos términos.

En la **Tabla de Valores** que he elaborado para calcular los términos de la fórmula de la suma $S^n{}_t$, el **primer término** de la columna comienza con $t^{n+1}/n+1$, según sea el valor de la **n**. Entonces el primer término de cada columna se calcula así: $T_1=t^3/3$, $t^4/4$, $t^5/5$, $t^6/6$, $t^7/7$,… La T_1 comprende el primer término de las primeras columnas. **Como los valores de los exponentes de la t se determinan por n+1, si se conoce el primer término de la columna, se pueden conocer los siguientes términos, de modo continuo y sin límites, mientras el valor de la n sea finito**.

El **segundo término** de cada columna se calcula, según sea el valor de la **n**, por la serie $T_2=(1/2t)(3, 4, 5, 6,\ldots)$. El **tercer término** de las columnas se calcula por $T_3=(1/6t)(2, 3, 4, 5, 6,\ldots)$. El **cuarto término** de las columnas se determina por la serie $T_4=(-3/30t^2)(3, 6, 10, 15, 21,\ldots)$. Los valores de T_4 forman la cuarta fila. La fórmula de esta serie es $T_4=(-3/30t^2)(p_4+1)(p_4+2)/2$. La p_4 indica el cuarto término de cada columna.

Los **términos quintos**, **sextos**, **séptimos**, **octavos** y **novenos** de cada columna, los calculamos con estas fórmulas:

$T_5=(-1/21t^2)(p+1)(p+2)/2$; $T_6=(-1/20t^2)(p+1)(p+2)/2$; $T_7=(-5/99t^2)(p+1)(p+2)/2$;

$T_8=(-691/13650t^2)(p+1)(p+2)/2$; $T_9=(-35/691t^2)(p+1)(p+2)/2$;

y, así sucesivamente, según sean los valores establecidos.

Esta **Tabla de Valores** nos permite calcular los términos de la fórmula de la suma de la serie de $S^{n=2}{}_t$. Y la formamos con los tres primeros valores de la primera columna, que son: $t^3/3$, $3/2t$ y $2/6t$. El **primer término** de la fórmula de $S^{n=2}{}_t$ es $t^3/3$. El **segundo** resulta de la multiplicación del **primer término** por el **segundo valor**, que es $(t^3/3)(3/2t)=t^2/2$. El **tercero** es el producto del **segundo término** por el **tercer valor**: $(t^2/2)(2/6t)=t/6$. Sumando los tres, tenemos que $S^{n=2}{}_t=t^3/3+t^2/2+t/6$. Efectuando las operaciones correspondientes para eliminar las fracciones, tenemos que $S^{n=2}{}_t=t(2t+1)(t+1)/6$.

A continuación expongo la **Tabla de Valores** para obtener las fórmulas de la suma de las series de $S^n{}_t$.

TABLA DE VALORES PARA CALCULAR LAS FÓRMULAS DE LA SUMA DE $S^n{}_t$

$S^{n=2}{}_t$	$S^{n=3}{}_t$	$S^{n=4}{}_t$	$S^{n=5}{}_t$	$S^{n=6}{}_t$	$S^{n=7}{}_t$	$S^{n=8}{}_t$	$S^{n=9}{}_t$	$S^{n=10}{}_t$	$S^{n=11}{}_t$
$t^3/3$	$t^4/4$	$t^5/5$	$t^6/6$	$t^7/7$	$t^8/8$	$t^9/9$	$t^{10}/10$	$t^{11}/11$	$t^{12}/12$
$3/2t$	$4/2t$	$5/2t$	$6/2t$	$7/2t$	$8/2t$	$9/2t$	$10/2t$	$11/2t$	$12/2t$
$2/6t$	$3/6t$	$4/6t$	$5/6t$	$6/6t$	$7/6t$	$8/6t$	$9/6t$	$10/6t$	$11/6t$
		$-3/30t^2$	$-6/30t^2$	$-10/30t^2$	$-15/30t^2$	$-21/30t^2$	$-28/30t^2$	$-36/30t^2$	$-45/30t^2$
				$-3/21t^2$	$-6/21t^2$	$-10/21t^2$	$-15/21t^2$	$-21/21t^2$	$-28/21t^2$
						$-3/20t^2$	$-6/20t^2$	$-10/20t^2$	$-15/20t^2$
								$-(5)(3)/99t^2$	$-(5)(6)/99t^2$

$S^{n=12}{}_t$	$S^{n=13}{}_t$	$S^{n=14}{}_t$	$S^{n=15}{}_t$	$S^{n=16}{}_t$
$t^{13}/13$	$t^{14}/14$	$t^{15}/15$	$t^{16}/16$	$t^{17}/17$
$13/2t$	$14/2t$	$15/2t$	$16/2t$	$17/2t$
$12/6t$	$13/6t$	$14/6t$	$15/6t$	$16/6t$
$-55/30t^2$	$-66/30t^2$	$-78/30t^2$	$-91/30t^2$	$-105/30t^2$
$-36//21t^2$	$-45/21t^2$	$-55/21t^2$	$-66/21t^2$	$-78/21t^2$
$-21/20t^2$	$-28/20t^2$	$-36/20t^2$	$-45/20t^2$	$-55/20t^2$
$-(5)(10)/99t^2$	$-(5)(15)/99t^2$	$-(5)(21)/99t^2$	$-(5)(28)/99t^2$	$-(5)(36)/99t^2$
$-691(3)/13650t^2$	$-691(6)/13650t^2$	$-691(10)/13650t^2$	$-691(15)/13650t^2$	$-691(21)/13650t^2$
		$-35(3)/691t^2$	$-35(6)/691t^2$	$-35(10)/691t^2$
				$-3617(3)/71400t^2$

$S^{n=17}{}_t$	$S^{n=18}{}_t$	$S^{n=19}{}_t$	$S^{n=20}{}_t$
$t^{18}/18$	$t^{19}/19$	$t^{20}/20$	$t^{21}/21$
$18/2t$	$19/2t$	20	$21/ 2t$
$17/6t$	$18/6t$	$19/2t$	$20/2t$
$-120/30t^2$	$-136/30t^2$	$-153/2t^2$	$-171/2t^2$
$-91/21t^2$	$-105/21t^2$	$-120/21t^2$	$-136/21t^2$

$-66/20t^2$	$-78/20t^2$	$-91/20t^2$	$-105/20t^2$
$-(5)(45)/99t^2$	$-(5)(55)/99t^2$	$-(5)(66)/99t^2$	$-(5)(78)/99t^2$
$-691(28)/13650t^2$	$-691(36)/13650t^2$	$-691(45)13650t^2$	$-691(55)/99t^2$
$-35(15)/691t^2$	$-35(21)/691t^2$	$-35(28)/691t^2$	$-35(36)/691t^2$
$-3617(6)/71400t^2$	$-3617(10)/71400t^2$	$-3671(15)/71400t^2$	$-3671(21)/71400t^2$
	$-219335(3)/4329549t^2$	$-219335(6)/4329549t^2$	$-219335(10)/4329549t^2$
			$-1222277(3)/24126850t^2$

$\mathbf{S^{n=21}_t}$	$\mathbf{S^{n=22}_t}$	$\mathbf{S^{n=23}_t}$
$t^{22}/22$	$t^{23}/23$	$t^{24}/24$
$22/2t$	$23/2t$	$24/2t$
$21/6t$	$22/6t$	$23/6t$
$-190/30t^2$	$-210/30t^2$	$-231/30t^2$
$-153/21t^2$	$-171/21t^2$	$-190/21t^2$
$-120/20t^2$	$-136/20t^2$	$-153/20t^2$
$-5(91)/99t^2$	$-5(105)/99t^2$	$-5(120)/99t^2$
$-691(66)/13650t^2$	$-691(78)/13650t^2$	$-691(91)/13650t^2$
$-35(45)/691t^2$	$-35(55)/691t^2$	$-35(66)/691t^2$
$-3617(28)/71400t^2$	$-3617(36)/71400t^2$	$-3617(45)/71400t^2$
$-219335(15)/4329549t^2$	$-219335(21)/4329549t^2$	$-219335(28)/4329549t^2$
$-1222277(6)/24126850t^2$	$-1222277(10)/24126850t^2$	$-1222277(15)/24126850t^2$
	$-4272565(3)/84337113t^2$	$-4272565(6)/84337113t^2$

$\mathbf{S^{n=24}_t}$	$\mathbf{S^{n=25}_t}$	$\mathbf{S^{n=26}_t}$
$t^{25}/25$	$t^{26}/26$	$t^{27}/27$
$25/2t$	$26/2t$	$27/2t$
$24/6t$	$25/6t$	$26/6t$

$-253/30t^2$	$-276/30t^2$	$-300/30t^2$
$-210/21t^2$	$-231/21t^2$	$-253/21t^2$
$-171/20t^2$	$-190/20t^2$	$-210/20t^2$
$-5(136)/99t^2$	$-5(153)/99t^2$	$-5(171/99t^2$
$-691(105)/13650t^2$	$-691(120)/13650t^2$	$-691(136)/13650t^2$
$-35(78)/691t^2$	$-35(91)/691t^2$	$-35(105)/691t^2$
$-3617(55)/71400t^2$	$-3617(66)/71400t^2$	$-3671(78)/71400t^2$
$-219335(36)/4329549t^2$	$-219335(45)/4329549t^2$	$-219335(55)/4329549t^2$
$-1222277(21)/24126850t^2$	$-1222277(28)/24126850t^2$	$-1222277(36)24126850t^2$
$-4272565(10)/84337113t^2$	$-4272565(15)/8433711t^2$	$-4272565(21)/8433711t^2$
$-236364091(3)/4665640980t^2$	$-236364091(6)/4665640980t^2$	$-236364091(10)/4665640980t^2$
		$-59871721(3)/1181820455t^2$

$\mathbf{S^{n=27}{}_t}$	$\mathbf{S^{n=28}{}_t}$
$t^{28}/28$	$t^{29}/29$
$28/2t$	$29/2t$
$27/6t$	$28/6t$
$-325/30t^2$	$-351/30t^2$
$-276/21t^2$	$-300/21t^2$
$-231/20t^2$	$-253/20t^2$
$-5(190)/99t^2$	$-5(210)/99t^2$
$-691(153)/13650t^2$	$-691(171)/t^2$
$-35(120)/691t^2$	$-35(136)/71400t^2$
$-3617(91)/71400t^2$	$-3617(105)71400t^2$
$-219335(66)/4329549t^2$	$-219335(78)/4329549t^2$
$-1222277(45)/24126850t^2$	$-1222277(55)/24126850t^2$

$-4272565(28)/84337113t^2$

$-236364091(15)/4665640980t^2$

$-59871721(6)/1181820455t^2$

$-4272565(36/84337113t^2$

$-236364091(21)/4665640980t^2$

$-59871721(10)1181820455t^2$

$-3392780147(3)/66970796490t^2$

$\mathbf{S^{n=29}_t}$

$t^{30}/30$

$30/2t$

$29/6t$

$-378/30t^2$

$-325/21t$

$-276/20t^2$

$-5(231)/99t^2$

$-691(190)/13650t^2$

$-35(153)/691t^2$

$-3617(120)/71400t^2$

$-219335(91)/4329549t^2$

$-1222277(66)/24126850t^2$

$-4272565(45)/84337113t^2$

$-236364091(28)/4665640980t^2$

$-59871721(15)/1181820455t^2$

$-3392780147(6)/66970796490t^2$

$\mathbf{S^{n=30}_t}$

$t^{31}/31$

$31/2t$

$30/6t$

$-406/30t^2$

$-351/21t^2$

$-300/20t^2$

$-5(253)/99t^2$

$-691(210)/13650t^2$

$-35(171)/691t^2$

$-3617(136)/71400t^2$

$-219335(105)/4329549t^2$

$-1222277(78)/24126850t^2$

$-4272565(55)/84337113t^2$

$-236364091(36)/4665640980t^2$

$-59871721(21)/1181820455t^2$

$-3392780147(10)/66970796490t^2$

$-8615841276005(3)/170069890428669t^2$

$\mathbf{S^{n=31}_t}$

$t^{32}/32$

$32/2t$

31/6t

-435/30t^2

-378/21t^2

-325/20t^2

-5(276)/99t^2

-691(231)/13650t^2

-35(190)/691t^2

-3617(153)/71400t^2

-219335(120)/4329549t^2

-1222277(91)/24126850t^2

-4272565(66)/84337113t^2

-236364091(45)/4665640980t^2

-59871721(28)/1181820455t^2

-3392780147(15)/66970796490t^2

-8615841276005(6)/170069890428669t^2.

A continuación, procedemos a hacer el cálculo de los términos de la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{S^{n=27}{}_t=1+2^{27}+3^{27}+4^{27}+\ldots+t^{27}}$. Formemos los términos de la fórmula $\mathbf{S^{n=27}{}_t}$ con los valores de su columna correspondiente.

El **primer término** es $\mathbf{T_1}=\mathbf{t^{28}/28}$.

El **segundo**, $\mathbf{T_2}=(t^{28}/28)(28/2t)=\mathbf{14t^{27}/28}$.

El **tercero**, $\mathbf{T_3}=(14t^{27}/28)(27/6t)=\mathbf{63t^{26}/28}$.

El **cuarto**, $\mathbf{T_4}=(63t^{26}/28)(-325/30t^2)=\mathbf{-682.5t^{24}/28}$.

El **quinto**, $\mathbf{T_5}=(-682.5t^{24}/28)(-276/21t^2)=\mathbf{8970t^{22}/28}$.

El **sexto**, $\mathbf{T_6}=(8970t^{22}/28)(-231/20t^2)=\mathbf{-103603.5t^{20}/28}$.

El **séptimo,** $\mathbf{T_7}=(-103603.5t^{20}/28)[-5(190)/99t^2]=\mathbf{994175t^{18}/28}$.

De ahora en adelante, los términos los calcularemos según sea el valor de $\mathbf{T_n}$.

Octavo término, $\mathbf{T_8}$=$\mathbf{T_7}$[-691(153)/13650t^2]=$\mathbf{-7700158.5t^{16}/28}$.

Noveno término, $\mathbf{T_9}$=$\mathbf{T_8}$[-35(120)/691t^2]=$\mathbf{46802700t^{14}/28}$.

Décimo término, $\mathbf{T_{10}}$=$\mathbf{T_9}$[-3617(91)/71400t^2]=$\mathbf{-215755858.5t^{12}/28}$.

Undécimo término, $\mathbf{T_{11}}$=$\mathbf{T_{10}}$[-219335(66)/4329549t^2]=$\mathbf{721392815t^{10}/28}$.

Duodécimo término, $\mathbf{T_{12}}$=$\mathbf{T_{11}}$[-1222277(45)/24126850t^2]=$\mathbf{-1644573703.5t^{8}/28}$.

Décimo tercer término, $\mathbf{T_{13}}$=$\mathbf{T_{12}}$[-4272565(28)/84337113t^2]=$\mathbf{2332820490t^{6}/28}$.

Décimo cuarto término, $\mathbf{T_{14}}$=$\mathbf{T_{13}}$[-236364091(15)/4665640980t^2]=$\mathbf{-1772730682.5t^{4}/28}$.

Décimo quinto término, $\mathbf{T_{15}}$=$\mathbf{T_{14}}$[-59871721(6)/1181820455t^2]=$\mathbf{538845489t^{2}/28}$.

Al sumar los términos de las **T** y multiplicar el resultado por 2/2, tenemos que

$$\mathbf{S^{n=27}{}_t=t^2[2t^{26}+28t^{25}+126t^{24}-1365t^{22}+17940t^{20}-207207t^{18}+1988350t^{16}-15400317t^{14}+}$$

$$\mathbf{+93605400t^{12}-431511717t^{10}+1442785630t^{8}-3289147407t^{6}+4665640980t^{4}+}$$

$$\mathbf{+(-3545461365)t^{2}+1077690978]/56}.$$

Para que los coeficientes de la fórmula $\mathbf{S^{n=12}{}_t}$ fuesen números enteros, sus términos se multiplicaron por **210/210**. Y en la fórmula $\mathbf{S^{n=24}{}_t}$, la suma de los coeficientes se multiplicó por **540/540**.

En la medida en que se realizan las operaciones para calcular los términos de la fórmula de la suma de las series de $\mathbf{S^{n}{}_t}$, aparecen fracciones que determinan que los coeficientes no sean números enteros. Por lo que se deben efectuar las operaciones pertinentes para evitarlo.

Si se conocen los términos de una columna par, ¿cómo se puede conocer el último término de la siguiente columna par?

Con los términos de la columna que corresponde a $\mathbf{S^{n=10}{}_t}$, $\mathbf{t^{11}/11}$, **11/2t**, **10/6t**, $\mathbf{-36/30t^2}$, $\mathbf{-21/21t^2}$, $\mathbf{-10/20t^2}$, $\mathbf{-5(3)/99t^2}$, y con la aplicación del procedimiento requerido, elaboramos la fórmula $\mathbf{S^{n=10}{}_t=t(6t^{10}+33t^9+55t^8-66t^6+66t^4-33t^2+5)/66}$. En la siguiente columna par de $\mathbf{S^{n=12}{}_t}$, los términos calculados son: $\mathbf{t^{13}/13}$, **13/2t**, **12/6t**, $\mathbf{-55/30t^2}$, $\mathbf{-35/21t^2}$, $\mathbf{-21/20t^2}$, $\mathbf{-5(10)/99t^2}$, **x**. El último valor expresa que se desconoce el término final de esa columna. Si designamos que t=1, la suma de los términos del numerador de $\mathbf{S_{12}}$ debe ser igual al valor del denominador, por lo que la resultante del cociente deber ser 1. Para evitar que algunos de los términos de la fórmula de la suma sean fraccionales o decimales, multiplicamos $\mathbf{S^{n=12}{}_t}$ por **210/210**. Como el denominador es **13(210)=2730**, y efectuando las operaciones requerida, tenemos la siguiente suma de los términos del numerador, **210+1365+2730-5005+8580-9009+4550+x=2730**. Por lo tanto, **x=- 691**. Una vez calculado este valor construimos la fórmula:

$\mathbf{S^{n=12}{}_t=t[210t^{12}+1365t^{11}+2730t^{10}-5005t^8+8580t^6-9009t^4+4550t^2-691]/2730}$.

¿**Cómo debemos elaborar el último término de la columna $\mathbf{S^{n=12}{}_t}$**? Dividimos el último término por el penúltimo. Para establecer la serie que corresponde al término $\mathbf{T_8}$, multiplicamos la división por **3/3**. En el numerador no efectuamos la operación, pero en el denominador sí. Entonces, tenemos $\mathbf{-691(3)/13650t^2}$. Según la fórmula de $\mathbf{T_8}$, los términos correspondientes en las columnas siguientes son:

$\mathbf{-691(6)/13650t^2}$; $\mathbf{-691(10)/13650t^2}$; $\mathbf{-691(15)/13650t^2}$; $\mathbf{-691(21)/13650t^2}$; $\mathbf{-691(28)/13650t^2}$,…

Este procedimiento técnico nos permite conocer de un modo continuo las fórmulas sucesivas de $\mathbf{S^n{}_t}$. Con una calculadora que opere con un número grande de dígitos, podemos conocer de un modo exacto las fórmulas de $\mathbf{S^n{}_t}$, siempre y cuando los coeficientes del numerador igualen ese número de dígitos.

Los términos de las columnas de esta **Tabla de valores** permiten resolver de un modo técnico las fórmulas de las sumas de $\mathbf{S^n{}_t}$ según sea el valor de la **n**.

Las fórmulas de las sumas de las series $\mathbf{S^{n=6}{}_t}$, $\mathbf{S^{n=7}{}_t}$, $\mathbf{S^{n=8}{}_t}$, $\mathbf{S^{n=9}{}_t}$, $\mathbf{S^{n=10}{}_t}$ y $\mathbf{S^{n=12}{}_t}$ las he elaborado con el ***método de integrales parciales de Agustín Cauchy***. La fórmula de $\mathbf{S^{n=11}}$ y desde la $\mathbf{S^{n=13}{}_t}$ hasta la $\mathbf{S^{n=31}{}_t}$, con ***nuestro procedimiento técnico***.

A continuación construimos con dicho procedimiento las siguientes fórmulas:

$\mathbf{S^{n=11}{}_t=t^2[2t^{10}+12t^9+22t^8-33t^6+44t^4-33t^2+10]/24;}$

$\mathbf{S^{n=13}{}_t=t^2[30t^{12}+210t^{11}+455t^{10}-1001t^8+2145t^6-3003t^4+2275t^2-691]/420;}$

$\mathbf{S^{n=14}{}_t=t[6t^{14}+45t^{13}+105t^{12}-273t^{10}+715t^8-1287t^6+1365t^4-691t^2+105]/90;}$

$\mathbf{S^{n=15}{}_t=t^2[3t^{14}+24t^{13}+60t^{12}-182t^{10}+572t^8-1287t^6+1820t^4-1382t^2+420]/48;}$

$\mathbf{S^{n=16}{}_t=t[30t^{16}+255t^{15}+680t^{14}-2380t^{12}+8840t^{10}-24310t^8+44200t^6-46988t^4+23800t^2-3617]/510;}$

$\mathbf{S^{n=17}{}_t=t^2[10t^{16}+90t^{15}+255t^{14}-1020t^{12}+4420t^{10}-14586t^8+33150t^6-46988t^4+35700t^2-10851]/180;}$

$\mathbf{S^{n=18}{}_t=t[210t^{18}+1995t^{17}+5985t^{16}-27132t^{14}+135660t^{12}-529074t^{10}+1469650t^8-2678316t^6+}$

$\mathbf{+2848860t^4-1443183t^2+219335]/3990;}$

$\mathbf{S^{n=19}{}_t=t^2[42t^{18}+420t^{17}+1330t^{16}-6783t^{14}+38760t^{12}-176358t^{10}+587860t^8-1339158t^6+1899240t^4+}$

$\mathbf{+(-1443183)t^2+438670]/840;}$

$\mathbf{S^{n=20}{}_t=t[330t^{20}+3465t^{19}+11550t^{18}-65835t^{16}+426360t^{14}-2238390t^{12}+8817900t^{10}-24551230t^8+}$

$\mathbf{+44767800t^6-47625039t^4+24126850t^2-3666831]/6930;}$

$S^{n=21}{}_t=t^2[30t^{20}+330t^{19}+1155t^{18}-7315t^{16}+53295t^{14}-319770t^{12}+1469650t^{10}-4910246t^8+$

$+11191950t^6-15875013t^4+12063425t^2-3666831]/660;$

$S^{n-22}=t[30t^{22}+345t^{21}+1265t^{20}-8855t^{18}+72105t^{16}-490314t^{14}+2600150t^{12}-10266878t^{10}+$

$+28601650t^8-52160757t^6+55491755t^4-28112371t^2+4272565]/690;$

$S^{n=23}{}_t=t^2[30t^{22}+360t^{21}+1380t^{20}-10626t^{18}+96140t^{16}-735471t^{14}+4457400t^{12}-20533756t^{10}+$

$+68643960t^8-156482271t^6+221967020t^4-168674226t^2+51270780]/720;$

$S^{n=24}{}_t=t[546t^{24}+6825t^{23}+27300t^{22}-230230t^{20}+2302300t^{18}-19684665t^{16}+135207800t^{14}+$

$+(-718681460)t^{12}+2839363800t^{10}-7911048145t^8+14427856300t^6-15349354566t^4+$

$+7776068300t^2-1181820455]/13650;$

$S^{n=25}{}_t=t^2[42t^{24}+546t^{23}+2275t^{22}-20930t^{20}+230230t^{18}-2187185t^{16}+16900975t^{14}-102668780t^{12}+$

$+473227300t^{10}-1582209629t^8+3606964075t^6-5116451522t^4+3888034150t^2+$

$+(-1181820455)]/1092;$

$S^{n=26}{}_t=t[70t^{26}+945t^{25}+4095t^{24}-40950t^{22}+493350t^{20}-5180175t^{18}+44737875t^{16}-308006340t^{14}+$

$+1638094500t^{12}-6472675755t^{10}+18034820375t^8-32891474070t^6+34992307350t^4+$

$+(-17727306825)t^2+2694227445]/1890;$

$S^{n=28}{}_t=t[30t^{28}+435t^{27}+2030t^{26}-23751t^{24}+339300t^{22}-4292145t^{20}+45522750t^{18}-394066935t^{16}+$

$+2714556600t^{14}-14439045915t^{12}+57055673550t^{10}-158975458005t^8+289936260900t^6+$

$+(-308455138755)t^4+156265191810t^2-23749461029]/870;$

$S^{n=29}{}_t=t^2[30t^{28}+450t^{27}+2175t^{26}-27405t^{24}+424125t^{22}-5852925t^{20}+68284125t^{18}-656778225t^{16}+$

$+5089793625t^{14}-30940812675t^{12}+142639033875t^{10}-476926374015t^8+$

$+1087260978375t^6-1542275693775t^4+1171988938575t^2-356241915435]/900;$

$S^{n=29}{}_t=t^2[2t^{28}+30t^{27}+145t^{26}-1827t^{24}+28275t^{22}-390195t^{20}+4552275t^{18}-43785215t^{16}+$

$+339319575t^{14}-2062720845t^{12}+9509268925t^{10}-31795091601t^8+72484065225t^6+$

$+(-102818379585)t^4+78132595905t^2-23749461029]/60;$

$S^{n=30}{}_t=t[462t^{30}+7161t^{29}+35805t^{28}-484561t^{26}+8099091t^{24}-121486365t^{22}+1552325775t^{20}+$

$+(-16502417085)t^{18}+142933380975t^{16}-984742931403t^{14}+5238144213225t^{12}+$

$+(-20698604632251)t^{10}+57673154564025t^{8}-105183202315455t^{6}+111901503855141t^{4}+$

$+(-56689963476223)t^{2}+8615841276005]/14322;$

$S^{n=31}{}_t=t^2[231t^{30}+3696t^{29}+19096t^{28}-276892t^{26}+4984056t^{24}-80990910t^{22}+1128964200t^{20}+$

$+(-13201933668)t^{18}+127051894200t^{16}-984742931403t^{14}+5986450529400t^{12}+$

$+(-27598139509668)t^{10}+92277047302440t^{8}-210366404630910t^{6}+$

$+298404010280376t^{4}-226759853904892t^{2}+68926730208040]/7392.$

LOS COEFICIENTES DE LA FÓRMULA $S^n{}_t=1+2^n+3^n+4^n+\ldots+t^n$

Para calcular los coeficientes de los términos de la fórmula $\mathbf{S^n{}_t}$, designemos que $\mathbf{A^n{}_t=(t+1)^n dt}$. Desarrollando el binomio tenemos que
$\mathbf{A^n{}_t=[t^n+nt^{n-1}+n(n-1)t^{n-2}/2!+n(n-1)(n-2)t^{n-3}/3!+n(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}/4!+\ldots+1]}$ **(1e)**.

En las operaciones del cálculo de las integrales de los coeficientes de los términos de la fórmula S se debe evitar, por comodidad, los coeficientes innecesarios. Para lograrlo, se multiplican los términos del cociente por **ab(…)mp/ab(…)mp**. Indudablemente que esta operación es simbólica, pero expresa la suposición del procedimiento que es prescindible para los fines de la demostración.

De $\mathbf{A^n{}_t}$, integramos el primer término del paréntesis, por lo que resulta que $\int \mathbf{t^n dt=t^{n+1}/(n+1)}$. Este es el primer término de $\mathbf{S^n{}_t}$.

El término t/(n+1), incrementamos el valor de la **t** en una unidad, le restamos el término y la diferencia la multiplicamos por **dt**, por lo que

$\mathbf{[(t+1)^{n+1}-t^{n+1}]dt/(n+1)=[(n+1)t^n+n(n+1)t^{n-1}/2!+n(n+1)(n-1)t^{n-2}/3!+n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-3}/4!+}$
$\mathbf{+n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}/5!+n(n+1(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)t^{n-5}/6!+}$
$\mathbf{+n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)t^{n-6}/7!+\ldots+1]dt/(n+1)}$ **(2e)**.

Integrando $\int \mathbf{n(n+1)t^{n-1}dt/(n+1)}$ de (**2e**) y $\int \mathbf{n(n+1)t^{n-1}dt/2!(n+1)}$ de (**1e**), y restando el segundo del primero, resulta $\mathbf{(n+1)t^n/(n+1)-(n(n+1)t^n/2(n+1)=(n+1)t^n/2(n+1)}$. Este es el segundo término de $\mathbf{S^n{}_t}$.

Del término $\mathbf{(n+1)t^n/2(n+1)}$, incrementamos el valor de la **t** en una unidad, le restamos el término y la diferencia la multiplicamos por **dt**, de lo que resulta

$\mathbf{[n(n+1)t^{n-1}+n(n+1)(n-1)t^{n-2}/2!+n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-3}/3!+n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}/4!+}$
$\mathbf{+n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)t^{n-5}/5!+n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)t^{n-6}/6!+\ldots+1]dt/2(n+1)}$ **(3e)**.

De la suma de **(3e)** y **(2e)** se obtiene este resultado

$[(n+1)t^n+n(n+1)t^{n-1}+5n(n+1)(n-1)t^{n-2}/12+n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-3}/8+7n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}/240+$
$+n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)t^{n-5}/180+n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-5)t^{n-6}/1120+\ldots+(n+3)/2]dt/(n+1)$ **(4e).**

De la integración de $\int n(n+1)(n-1)^{tn-2}dt/12(n+1)$ **de (1e)** y $\int 5n(n+1)(n-1)t^{n-2}dt/12(n+1)$ **de (4e),** de **la resta del segundo del primero y de la multiplicación de la diferencia por dt, tenemos** $\int n(n+1)t^{n-2}/12(n+1)-\int 5n(n+1)(n-1)t^{n-2}/12(n+1)=n(n+1)(n-1)t^{n-2}/12(n+1)$. Este es el **tercer término** de $S^n{}_t$.

Del término $n(n+1)(n-1)t^{n-2}/12(n+1)$, se incrementa el valor de la **t** en una unidad, se resta el término, la diferencia se multiplica por **dt**, y se obtiene este resultado,

$[n(n+1)/12][(n-1)(n-2)t^{n-2}+(n-1)(n-2)t^{n-3}/2!+(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}/3!+(n-1)(\ldots)(n-4)t^{n-5}/4!+$
$+(n-1)(\ldots)(n-5)t^{n-6}/5!+\ldots+1]dt$ **(5e).**

De la suma de **(5e)** y **(4e),** tenemos

$[(n+1)t^n + n(n+1)t^{t-1} + n(n+1)(n-1)t^{t-2}/2!+ n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-3}/3! + 31n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}/720+$
$+13n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)t^{n-5}/1440 + n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-5)t^{n-6}/630+\ldots+(n^2+7n+18)]dt/12$ **(6e).**

De las integrales $\int n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-3)t^{n-4}dt/4!$ De **(2e)** y $\int 31n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)t^{n-4}dt/720$ de **(6e)** restamos la segunda de la primera, resultando $-n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-3}/720$. Este es el **cuarto término** de $S^n{}_t$.

Del término $-n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-3}/720$, incrementamos el valor de la **t** en una unidad, le restamos el término y la diferencia la multiplicamos por **dt**. De esta operación resulta, $[-n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-3}+(n-4)t^{n-4}/2!+(n-3)(n-4)(n-5)t^{n-5}/3!+\ldots+1]dt/720$ **(7e)**.

De la adición de **(7e)** y **(6)**, tenemos

$[(n+1)t^n+n(n+1)t^{n-1}+n(n+1)(n-1)t^{n-2}/2!+n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-3}/3!+n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}/4!+$
$+n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)t^{n-5}/5!+41n(n+1)(n-1)(\ldots)t/30240+\ldots+$
$+n(n^2+7n+18)/12-n(n+1)(n-1)(n-2)]/720$ **(9e)**.

De la diferencia de las integrales de $\int n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)t^{n-6}dt/6!$ de **(2e)** y $\int 41n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)t^{n-6}dt/30240$ de **(9e)**, resulta el **quinto término** de $S^n{}_t$, que es $n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)t^{n-5}/30240$.

Del término $n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)t^{n-5}/30240$, incrementamos el valor de la **t** en una unidad, restamos el término y la diferencia la multiplicamos por **dt**, por lo que $[n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)][(t+1)^{n-5}-t^{n-5}]dt/30240=[n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-5)t^{n-5}/30240+\ldots+$
$+n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)/30240]dt$ **(10e)**.

De la suma de **(10e)** y de **(9e)** tenemos que

(10e)+(9e)=$[(n+1)t^n+n(n+1)t^{n-1}+n(n+1)(n-1)t^{n-2}/2!+\ldots+n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-5)t^{n-6}/6!+$ $+\ldots+(n^2+7n+18)/12-n(n+1)(n-1)(n-2)/720+n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)/30240]dt$ **(11e)**.

Los términos de los polinomios **(5e)**, **(7e)** y **(11e)** indican de modo evidente, de que en la medida en que se calcula la fórmula de S^n_t, los términos de los polinomios posteriores se aproximan, hasta que finalmente se igualan a los de A^n_t.

En los pasos requeridos de este procedimiento se muestra por qué en la fórmula de S, el cuarto término es negativo, el quinto positivo y así sucesivamente. Además, por qué a partir del cuarto término, sucesivos valores del exponente de la t disminuyen en dos unidades con respecto al anterior.

Por las operaciones matemáticas aplicadas, se han calculado los cinco primeros términos de la fórmula S^n_t, lo que nos permite elaborar, de modo parcial, un procedimiento general para calcularlos. Por ejemplo,

$S^n_t=[t^{n+1}+(n+1)t^n/2+n(n+1)(n-1)t^{n-1}/12-n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-2}/720+n(n+1)(n-1)(\ldots)(n-4)t^{n-3}/30240+$ $+\ldots+w+\ldots+x]/(n+1)$. Los términos **w y x** son **incógnitas** que deben calcularse según las operaciones que se requieran hasta lograr la última**.**

CUARTA PARTE

EXPLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE LAS SUMAS DE LAS SERIES $P^n_t=1+3^n+5^n+7^n+\ldots+t^n$ Y $Q^n_t=2^n+4^n+6^n+8^n+\ldots+t^n$

En el cálculo de los términos de los polinomios de las fórmulas de S^n_t, no se presentó ningún problema de corrección en los procedimientos aplicados. La razón se debe a que las bases de las potencias de S^n_t son números enteros positivos consecutivos en una unidad.

En las fórmulas de las series $P^n_t=1+3^n+5^n+7^n+\ldots+t^n$ y $Q^n_t=2^n+4^n+6^n+8^n+\ldots+t^n$ [$Q^n_t=2^n(1+2^n+3^n+4^n+\ldots+t^n/2)$], el cálculo de las integrales que se obtienen del polinomio de $A^{n=4}_t$, no forman las fórmulas exactas de P^n_t y Q^n_t. Además las sumas de las integrales deben dividirse por 2. La razón estriba en que las bases de las potencias de P^n_t y Q^n_t son consecutivas en dos unidades. Tampoco la fórmula que se obtiene en esta operación expresa de modo exacto la suma de las series de P^n_t y Q^n_t. A esta fórmula la designamos B^n_t.

La fórmula B^n_t expresa los valores de P^n_t y Q^n_t cuando el valor de la **n** es par. Pero cuando el valor de la **n** es impar, la fórmula B^n_t expresa de modo exacto los valores de P^n_t, pero no los de Q^n_t. Sin embargo, los valores de P^n_t son aproximados con una diferencia constante y pequeña con relación a sus verdaderos valores.

En las series $P^{n=4}_t=1+3^4+5^4+7^4+\ldots+t^4$ y $Q^{n=4}_t=2^4+4^4+6^4+8^4+\ldots+t^4$, la ecuación de los términos es $A^{n=4}_t=30(t+2)^4dt/30$. Desarrollando la ecuación tenemos que, $A^{n=4}_t=(30t^4+240t^3+720t^2+960t+480)dt/30$ (**1a**).

El **primer término** del polinomio de la fórmula de $\mathbf{B^{n=4}_t}$ lo obtenemos separando el primer término de $\mathbf{A^{n=4}_t}$, y efectuando esta integración, $\int\mathbf{30t^4dt/30=6t^5/30}$.

Del término $\mathbf{6t^5/30}$ incrementamos el valor de la **t** en dos unidades, le restamos el término, la diferencia la multiplicamos por **dt** y la dividimos por **2**.

$[6(t+2)^5-6t^5]\mathbf{dt}/60=(30t^4+120t^3+240t^2+240t+96)\mathbf{dt}/30$ (**2a**).

El **segundo término** de la formula de $\mathbf{B^{n=4}_t}$ lo obtenemos integrando los valores $\int\mathbf{240t^3dt/30}$ de (**1a**) y $\int\mathbf{120t^3dt/30}$ de (**2a**), y restando el segundo del primero, resulta $\mathbf{30t^4/30}$.

Del término $\mathbf{30t^4/30}$ incrementamos el valor de la **t** en dos unidades, le restamos el término, la diferencia la multiplicamos por **dt** y la dividimos por **2**,

$[30(t+2)^4-30t^4]\mathbf{dt}/60=(120t^3+360t^2+480t+240)\mathbf{dt}/30$ (**3a**).

Sumando (**2a**) y (**3a**), tenemos que

(**2a**)+(**3a**)=$(30t^4+240t^3+600t^2+720t+336)\mathbf{dt}/30$ (**4a**).

El **tercer término** de la fórmula de $\mathbf{B^{n=4}_t}$ lo obtenemos integrando los términos $\int\mathbf{720t^2dt/30}$ de (**1a**) y $\int\mathbf{600t^2dt/30}$ de (**4a**). Restando el segundo del primero, $(240t^3-200t^3)/30=\mathbf{40t^3/30}$.

Del término $\mathbf{40t^3/30}$ incrementamos el valor de **t** en 2 unidades, le restamos el término, multiplicamos la diferencia por **dt** y la dividimos por **2**. Por lo que

$[(40(t+2)^3-40t^3]dt/60=(120t^2+240t+160)\mathbf{dt}/30$ (**5a**).

Y efectuando la siguiente suma, tenemos,

(**4a**)+(**5a**)=$(30t+240t+720t+960t+496)\mathbf{dt}/30$ (**6a**).

El **cuarto término** de la fórmula de $\mathbf{B^{n=4}_t}$ lo obtenemos integrando los términos $\int\mathbf{480dt/30}$ de (**1a**) y $\int\mathbf{496dt/30}$ de (**6a**), restando el segundo del primero resulta, $480t-496t=\mathbf{-16t}$.

Del término $\mathbf{-16t/30}$ incrementamos el valor de la **t** en **2** unidades, le restamos término, multiplicamos la diferencia por **dt** y la dividimos por **2**,

$[-16(t+2)-(-16t)]\mathbf{dt}/60=-16dt/30$ (**7a**). Y efectuamos la suma

(**6a**)+(**7a**)=$(30t^4+240t^3+720t^2+960t+480)\mathbf{dt}/30$ (**8a**).

Como todas las integrales ($\mathbf{6t^5/30}$; $\mathbf{30t^4/30}$; $\mathbf{40t^3/30}$; $\mathbf{-16t/30}$) **deben dividirse por 2**, entonces tenemos que

$\mathbf{B^{n=4}_t=(3t^5+15t^4+20t^3-8t)/30}$. Las fórmulas $\mathbf{P^{n=4}_t}$ y $\mathbf{Q^{n=4}_t}$ se deducen de la $\mathbf{B^{n=4}_t}$.

Para evidenciar este criterio, asignemos en la fórmula $\mathbf{B^{n=4}_t}$, los siguientes valores: **t**=1, 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, 9, 10,… Entonces según sean los valores, tenemos que $\mathbf{B^{n=4}_t}$=1, 16, 82, 272, 707, 1568, 3108, 5664, 9669, 15664,… Sin embargo, para que los valores de la **t** se cumplan en las fórmulas correspondientes, designemos que en $\mathbf{P^{n=4}_t}$, **v=(t+1)/2** y en $\mathbf{Q^{n=4}_t}$, **u=t/2**.

Sustituyendo y efectuando las operaciones requeridas, tenemos que

$\mathbf{P^{n=4}_v=v(48v^4-40v^2+7)/15}$; y $\mathbf{Q^{n=4}_u=16u(6u^4+15u^3+10u^2-1)/30}$.

Para calcular las fórmulas de las sumas de las series $\mathbf{P^{n=8}_v}=1+3^8+5^8+7^8+\dots v^8$ y $\mathbf{Q^{n=8}_u}=2^8+4^8+6^8+8^8+\dots+u^4$, aplicamos el primer procedimiento, por lo que

$\mathbf{B^{n=8}_t}=t(5t^8+45t^7+120t^6-336t^4+640t^2-384)/90$. Con la aplicación del segundo, tenemos

$\mathbf{P^{n=8}_v=v(1280v^8-3840v^6+4704v^4-2480v^2+381)/45}$. Y con el tercero,

$\mathbf{Q^{n=8}_u=2^8u(10u^8+45u^7+60u^6-42u^4+20u^2-3)/90}$.

Por inducción matemática, todas las fórmulas de las sumas de las series $\mathbf{P^n_v}$, en que el valor de la **n** sea par, se forman según el procedimiento que se ha aplicado.

Utilizando el mismo procedimiento, resolvamos las series $\mathbf{P^{n=5}_v}=1+3^5+5^5+7^5+\dots v^5$ y $\mathbf{Q^{n=5}_u}=2^5+4^5+6^5+8^5+\dots+u^5$.

Según el primer procedimiento, tenemos que $\mathbf{B^{n=5}_t}=t(t^5+6t^4+10t^3-8t^2)/12$. Si le asignamos los siguientes valores, **t**=1, 3, 5, 7, 9,…; resulta que

$\mathbf{B^{n=5}_t}$=0.75, 243.75, 3368.75, 20175.75, 79224.75,… Y cuando t=1, 3, 5, 7, 9,…; resulta que $\mathbf{B^{n=5}_t}$=32, 1056, 8832, 41600, 141600,…

Es evidente que de la fórmula $\mathbf{B^{n=5}_t}$ se puede deducir $\mathbf{P^{n=5}_v}$ de un modo exacto. Pero cuando los valores de la **t** son impares, a los de $\mathbf{B^{n=5}_t}$ les falta el decimal 0.25 para que los resultados sean exactos. Entonces para deducir la $\mathbf{P^{n=5}_v}$ de $\mathbf{B^{n=5}_t}$, designemos que $\mathbf{C^{n=5}_t}=\mathbf{B^{n=5}_t}+0.25$. Por consiguiente, $\mathbf{C^{n=5}_t}=(t^6+6t^5+10t^4-8t^2+3)/12$. Como v=(t+1)/2, entonces $\mathbf{P^{n=5}_v=v^2(16v^4-20v^2+7)/3}$.

Ahora resolvamos las series $\mathbf{P^{n=7}_v}=1+3^7+5^7+7^7+\dots v^7$ y $\mathbf{Q^{n=7}_u}=2^7+4^7+6^7+8^7+\dots+u^7$. Aplicando el primer procedimiento, tenemos que $\mathbf{B^{n=7}_t=t^2(3t^6+24t^5+56t^4-112t^2+128)/48}$. La fórmula $\mathbf{P^{n=7}_v}$ se deduce de modo exacto de $\mathbf{B^{n=7}_t}$. Efectuando las operaciones requeridas, tenemos que $\mathbf{Q^{n=7}_u=2^7u^2(3u^6+12u^5+14u^4-7u^2+2)/24}$.

Dado que $\mathbf{C^{n=7}_t}=\mathbf{B^{n=7}_t - 51/48}$; resulta que $\mathbf{C^{n=7}_t}=(3t^8+24t^7+56t^6-112t^4+128t^2-51)/48$. Y como t=2v-1, tenemos que $\mathbf{P^{n=7}_v=v^2(48v^6-112v^4+98v^2-31)/3}$.

Cuando el valor de la **n** es impar, las fórmulas de $\mathbf{P_n}$ deben deducirse de la fórmula $\mathbf{C^n{}_t}=\mathbf{B^n{}_t}+a/b$. La fracción a/b es la corrección necesaria que se hace de $\mathbf{B^n{}_t}$ para deducir las fórmulas impares de $\mathbf{P^n{}_v}$.

Debido a la corrección que hay que efectuar para deducir las fórmulas impares de $\mathbf{P^n{}_v}$ de $\mathbf{B^n{}_t}$, las fórmulas que se calculan de las columnas de la **Tabla N°3** carecen de exactitud. Por lo que hay que efectuar una operación sencilla para encontrar el margen de error. Con tres o cuatro valores exactos que se tengan de la serie $\mathbf{P^n{}_v}=1+3^n+5^n+7^n+9^n+\ldots+v^n$, y se dividan esos valores con los de la fórmula que se obtenga de la columna elegida, se encuentra el margen de error. Por consiguiente, al primer término de la columna se le multiplica el término encontrado. Sin embargo, tenemos un procedimiento sencillo para calcular los coeficientes de los términos de las fórmulas impares de $\mathbf{P^n{}_v}$. si se conocen los coeficientes de los términos de la fórmula par anterior. Por lo que el primer coeficiente se divide por el número de términos, de mayor a menor, ya que el número términos de ambas fórmulas es igual. Por ejemplo,

$\mathbf{P^{n=8}{}_t=v(1280v^8-3840v^6+4704v^4-2480v^2+381)/45}$. El polinomio del numerador de $\mathbf{P^{n=8}{}_t}$ tiene cinco términos.

Para calcular los coeficientes de $\mathbf{P^{n=9}{}_t}$, se efectúan las siguientes divisiones: 1280/5, 3840/4, 4704/3, 2480/2, 381/1. Es preferible que todas las divisiones resulten ser números enteros, por lo tanto tenemos $\mathbf{P^{n=9}{}_t=v^2(256v^8-960v^6+1568v^4-1240v^2+381)/5}$. El denominador deber ser igual a la suma de los coeficientes. Cuando en las divisiones nos encontramos con un número que no es entero, entonces multiplicamos todos los coeficientes de los términos de la fórmula par por ese número u otros que originen fracciones. El resultado se divide por ese número.

Factorizando las sumas de las series $\mathbf{Q^n{}_t}$ por 2^n, tenemos $\mathbf{Q^n{}_t}=2^n(1+2^n+3^n+4^n+\ldots t^n/2)$. En consecuencia, expresamos $\mathbf{Q^n{}_t}=2^n\mathbf{S^n{}_t}$. El factor que contiene la serie corresponde a $\mathbf{S^n{}_t}$. A continuación exponemos las fórmulas de $\mathbf{Q^n{}_t}$.

$\mathbf{Q^{n=2}{}_t=2^2S^{n=2}{}_t; Q^{n=3}{}_t=2^3S^{n=3}{}_t; Q^{n=4}{}_t=2^4S^{n=4}{}_t; Q^{n=5}{}_t=2^5S^{n=5}{}_t; Q^{n=6}{}_t=2^6S^{n=6}{}_t;\ldots;}$

$\mathbf{Q^{n=27}{}_t=2^{27}S^{n=27}{}_t; Q^{n=28}{}_t=2^{28}S^{n=28}{}_t; Q^{n=29}{}_t=2^{29}S^{n=29}{}_t, Q^{n=30}{}_t=2^{30}S^{n=30}{}_t; Q^{n=31}{}_t=2^{31}S^{n=31}{}_t,\ldots}$

Por ende, como las series $\mathbf{Q^n{}_t}=3^n+6^n+9^n+12^n+\ldots+t^n$ y $\mathbf{Q^n{}_t}=4^n+8^n+12^n+16^n+\ldots+b^n$ se factorizan por $\mathbf{S_n}$, las expresamos así: $\mathbf{Q^n{}_t=3^nS^n{}_t}$; $\mathbf{Q^n{}_t}=4^n\mathbf{S^n{}_t}$.

Generalizando, resulta que

$\mathbf{Q^n{}_t}=f^n+(2f)^n+(3f)^n+(4f)^n+\ldots+(tf)^n$; $\mathbf{Q^n{}_t}=f^n(1+2^n+3^n+4^n+\ldots+t^n)$; $\mathbf{Q^n{}_t}=f^n\mathbf{S^n{}_t}$.

A continuación expresamos las fórmulas de las series $\mathbf{P^n{}_v=1+3^n+5^n+7^n+\ldots+v^n}$ hasta un valor en que **n=19**.

$\mathbf{P^{n=2}{}_v=v(4v^2-1)/3;}$ $\mathbf{P^{n=3}{}_v=v^2(2v^2-1);}$ $\mathbf{P^{n=4}{}_v=v(48v^4-40v^2+7)/15;}$

$P^{n=5}{}_v=16v^2(v^4-20v^2+7)/3$; $P^{n=6}{}_v=v(192v^6-336v^4+196v^2-31)/21$;

$P^{n=7}{}_v=v^2(48v^6-112v^4+98v^2-31)/3$;

$P_8=v(1280v^8-3840v^6+4704v^4-2480v^2+381)/45$;

$P^{n=9}{}_v=v^2(256v^8-960v^6+1568v^4-1240v^2+381)/5$;

$P^{n=10}{}_v=v(3072v^{10}-14080v^8+29568v^6-32736v^4+16764v^2-2555)/33$;

$P^{n=11}{}_v=v^2(512v^{10}-2816v^8+7392v^6-10912v^4+8382v^2-2555)/3$;

$P^{n=12}{}_v=v(430080v^{12}-2795520v^{10}+8968960v^8-17022720v^6+18306288v^4-9300200v^2+$

$+1414477)/1365$;

$P^{n=13}{}_v=v^2(61440v^{12}-465920v^{10}+1793792v^8-4255680v^6+6102096v^4-4650100v^2+$

$+1414477/105$;

$P^{n=14}{}_v=v[49152v^{14}-430083v^{12}+1956864v^{10}-5674240v^8+1046073v^6-11160240v^4+5657908v^2+$

$+(-860055)]/45$;

$P^{n=15}{}_v=v^2[6144v^{14}-61440v^{12}+326144v^{10}-11344848v^8+2615184v^6+(-3720080)v^4+5657908v^2+$

$+(-860055)]/3$;

$P^{n=16}{}_v=v[983040v^{16}-11141120v^{14}+68239360v^{12}-280616960v^{10}+790366720v^8-1445516800)v^6+$

$+1538950976v^4-779783200v^2+118518239]/255$;

$P^{n=17}{}_v=v^2[327680v^{16}-4177920v^{14}+29245440v^{12}-140308480v^{10}+474220032v^8-1084137600v^6+$

$+1538950976v^4-1169674800v^2+355554717]/45$;

$P^{n=18}{}_v=v[27525120v^{18}-392232960v^{16}+3111714816v^{14}-17225564160v^{12}+68805015552v^{10}+$

$+(-192253734400)v^8+350880822528v^6-373360196160v^4+189155109444v^2+$

$+(-28748457785)]/1995$;

**$P^{n=19}{}_v=v^2[2752512v^{18}-43581440v^{16}+388964352v^{14}-2460794880v^{12}+11467502592v^{10}+$
$+(-38450746880)v^8+87720205632v^6-124453398720v^4+ +94577554722v^2-28748457785]/105$.**

SOLUCIÓN TÉCNICA DE LAS FÓRMULAS $P^n{}_v$ Y $Q^n{}_t$

Como $\mathbf{Q}^n{}_t=2^n\mathbf{S}^n{}_t$, entonces las fórmulas de $\mathbf{Q}^n{}_t$ se pueden resolver, además del ***Método de Cauchy***, por el procedimiento técnico de las de $\mathbf{S}^n{}_t$.

De la investigación y análisis de las fórmulas de $\mathbf{Q^n_t}$ he elaborado las **Tabla 2°** y la **Tabla 3°**. En la **Tabla 2°** expreso las columnas y filas en que pueden resolverse los términos de las fórmulas de $\mathbf{P^n_v}$, y en que el valor de la **n** sea un número par. En la **Tabla 2°**, los términos de las fórmulas de $\mathbf{P^n_v}$ se pueden calcular directamente los valores de cada columna. Pero en esa operación matemática, algunos coeficientes de la fórmula pudieran tener fracciones. Para evitarlo, se busca el número que origina la fracción, y se factoriza el coeficiente anterior con el número que corresponde al orden de la columna. De este modo se obtienen los coeficientes enteros. El número, o números encontrados, se multiplica con el primer término de la columna. El denominador es igual al denominador de la fórmula de $\mathbf{S^t_t}$ correspondiente dividido por dos.

Los términos de la primera fila se calculan por esta ecuación $\mathbf{T_1=2^nv^{n+1}}$. Los términos de la segunda fila con la ecuación $\mathbf{T_2=-c(2c+1)/12v^2}$. El valor de la **c** es el número del término en el orden de la fila. Los coeficientes de la tercera fila, se calculan por $\mathbf{T_3=-7c(2c+1)/120v^2}$. Los de la cuarta fila, por $\mathbf{T_4=-31c(2c+1)/588v^2}$. La quinta por $\mathbf{T_5=-127c(2c+1)/2480v^2}$. La sexta, por $\mathbf{T_6=2555c(2c+1)/50292v^2}$. La séptima por $\mathbf{T_7=-1414477c(2c+1)/27900600v^2}$. La octava, por $\mathbf{T_8=-286685c(2c+1)/5657908v^2}$. La novena, por $\mathbf{T_9=-16931177c(2c+1)/334192800v^2}$. La décima, por $\mathbf{T_{10}=-28748457785c(2c+1)/567465328332v^2}$. Etc.

Si se conocen los términos de una columna par, ¿**cómo se pueden conocer los términos de la siguiente columna par**? Por medio de las fórmulas anotadas anteriormente. Y, ¿**cómo se forman esas fórmulas**? Si las fórmulas tienen cierta simetría, se puede comenzar con la fórmula $\mathbf{P_2=v(4v^2-1)/3}$. El primer término de la columna correspondiente lo calculamos con $\mathbf{T_1=2^2v^3}$. El segundo término lo determinamos dividiendo el segundo término del paréntesis por el primero.

Para formar la ecuación de la segunda fórmula, se multiplica la fracción por 3/3. Si el numerador se factoriza por 3, entonces no hay necesidad de efectuar esa operación. Las otras factorizaciones se hacen para simplificar la fracción. Por lo que el segundo término de la columna de $\mathbf{P_2}$ se forma así: $\mathbf{T_2=(-v)/(4v^3)}$; $\mathbf{T_2=-1/4v^2}$; $\mathbf{T_2=-3/12v^2}$. De las fórmulas correspondientes, los valores de la siguiente columna par, son: $\mathbf{P_4=2^4v^5}$; $\mathbf{-10/12v^2}$; **x**. Como el denominador de $\mathbf{P_4}$ es igual al del $\mathbf{S_4}$ dividido por 2, entonces $\mathbf{d_4}$=30/2; $\mathbf{d_4}$=15. Ahora podemos calcular el valor de la **x** designando que **v=1**. Por lo que **48-40+x=15**; **x=7**.

De acuerdo al orden de la columna, resulta que **x=7v**. Entonces, $\mathbf{P_4=v(48v^4-40v^2+7)/15}$. Aplicando este procedimiento se calculan los últimos términos de las siguientes columnas pares. Al final de este texto, adjuntamos las **Tablas 3°** y **4°**.

SOLUCIÓN DE LAS SUMAS DE LAS SERIES $\mathbf{F^{n=2}_f=1+4^2+7^2+10^2+\ldots+f^2}$; $\mathbf{G^{n=2}_g=2^2+5^2+8^2+11^2+\ldots+g^2}$; $\mathbf{H^{n=2}_h=3^2+6^2+9^2+12^2+\ldots+h^2}$

Las fórmulas de las series $\mathbf{F^{n=2}_f}$ y $\mathbf{G^{n=2}_g}$ se pueden deducir por este procedimiento común. Designemos $\mathbf{A^{n=2}_t=(t+3)^2dt/3}$. **Esta fórmula define las bases de las potencias, ya que son consecutivas en tres** (**3**) **unidades**.

Desarrollando el binomio, tenemos que $\mathbf{A^{n=2}_t=(t^2+6t+9)dt/3}$. Para facilitar la operación de las integrales desarrollamos la ecuación, por lo que $\mathbf{A^{n=2}_t=(6t^2+36t+54)dt/18}$ (**1a**). Designemos que la suma de las integrales sea $\mathbf{B^{n=2}_t}$.

El **primer término** de $\mathbf{B^{n=2}_t}$ lo obtenemos integrando $\mathbf{\int 6t^2dt=2t^3/18}$.

Del término $\mathbf{2t^3}$ incrementamos el valor de la **t** en tres unidades, le restamos el término, y multiplicamos la diferencia por **dt**, $[2(t+3)^3-2t^3)\mathbf{dt}/18=(6t^2+18t+18)\mathbf{dt}/18$ (**2a**).

El **segundo término** de $\mathbf{B^{n=2}_t}$ lo obtenemos integrando $\mathbf{\int 36tdt/18}$ de (**1a**) y $\mathbf{\int 18tdt/18}$ de (**2a**), y restando el segundo del primero, resulta $\mathbf{18t^2-9t^2=9t^2/18}$.

Del término $\mathbf{9t^2/18}$ incrementamos el valor de la **t** en tres unidades, le restamos el término, y multiplicamos la diferencia por **dt**, $[9(t+3)^2-9t^2]\mathbf{dt}/18=(18t+27)\mathbf{dt}/18$ (**3a**). Ahora sumamos $(2a)+(3a)=(6t^2+36t+45)\mathbf{dt}/18$ **(4a**).

El **tercer término** de $\mathbf{B^{n=2}_t}$ lo obtenemos integrando $\mathbf{\int 54dt/18}$ de (**1a**) y **45dt/18** de (**4a**), y restando el segundo del primero, **(54t-45t)=9t/18**.

Del término **9t/18** incrementamos el valor de **t** en tres unidades, le restamos el término y multiplicamos la diferencia por **dt**, $[9(t+3)-9t]\mathbf{dt/18}=9\mathbf{dt}/18$. Efectuamos la suma $(4a)+(5a)=(6t^2+36t+54)\mathbf{dt}/18$ (**6a**). Sumando las integrales de esas expresiones tenemos que $\mathbf{B^{n=2}_t=(2t^3+9t^2+9t)/18}$.

Asignando los siguientes valores, t=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,…, tenemos que $\mathbf{B^{n=2}_t}$=1.11, 3.88, 9, 17.11, 28.88, 45, 66.11, 92.88, 126, 166.11, 213.88, 270… Podemos verificar que dicha ecuación proporciona valores exactos de $\mathbf{G^{n=2}_g}$. Pero para que los valores de $\mathbf{F_2}$ sean exactos debemos hacer esta operación, $\mathbf{F^{n=2}_f}=\mathbf{B_2}-1/9$. Y para $\mathbf{H^{n=2}_h}$, $\mathbf{B^{n=2}_t}+1/9$.

Efectuando las operaciones requeridas, tenemos que $\mathbf{F^{n=2}_f=(t^3+9t^2+9t-2)/18}$ y $\mathbf{H_2=(2t^3+9t^2+9t+2)/18}$. Como los valores de $\mathbf{F^{n=2}_f}$ son exactos, entonces $\mathbf{F^{n=2}_f}=\mathbf{B^{n=2}_t}$. Pero estas igualdades son exacta sólo si $\mathbf{t_F}=3f-2$; $\mathbf{t_G}=3g-1$; $\mathbf{t_H}=3h$. Haciendo las sustituciones, resulta que $\mathbf{F_2=f(6f^2-3f-1)/2}$; $\mathbf{G_2=g(6g^2+3g-1)/2}$ y $\mathbf{H_2=3h(2h^2+3h+1)/6}$.

Si multiplicamos $\mathbf{S^{n=2}_t}$ por 3^2, tenemos que $\mathbf{H^{n=2}_h}=3^2\mathbf{S_2}$; y por un procedimiento de inducción, $\mathbf{H^n_h}=3^n\mathbf{S_n}$. Con esta fórmula general conocemos que $\mathbf{H^{n=27}_h}=3^{27}\mathbf{S_{27}}$; $\mathbf{H^{n=28}_h}=3^{28}\mathbf{S^{n=28}_t}$; $\mathbf{H^{n=29}_h}=3^{29}\mathbf{S^{n=29}_t}$; $\mathbf{H^{n=30}_h}=3^{30}\mathbf{S^{n=30}_t}$; $\mathbf{H^{n=31}_h}=3^{31}\mathbf{S^{n=31}_t}$;…

Sea la serie $\mathbf{M_a}=(b+a)^n+(b+2a)^n+(b+3a)^n+(b+4a)^n+\ldots+(b+ta)^n$. Si los valores de **a** y **b** son números enteros positivos, entonces habrán tantas series de sumas de potencias con exponente **n** como las que se han descrito anteriormente. Entre las fórmulas posibles existe una, que si **b**=0, la expresamos del siguiente modo: $\mathbf{H_n}=a^n+(2a)^n+(3a)^n+(4a)^n+\ldots+(ta)^n$; $\mathbf{H^n_h}=a^n(1+2^n+3^n+4^n+\ldots+t^n)$; $\mathbf{H^n_h=a^nS^n_t}$.

Cuando el valor de la **a** es igual o mayor que tres, las fórmulas de la suma de las otras series posibles, se debe aplicar un procedimiento similar como el que se ha utilizado, para expresar de un modo exacto su forma matemática.

Con respecto a la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{H^n_h}$, designemos que a=5. Entonces $\mathbf{H^n_h}=5^n+10^n+15^n+20^n+\ldots+(5t)^n$; $\mathbf{H^n_h}=5^n(1+2^n+3^n+4^n+\ldots+t^n)$; $\mathbf{H^n_h}=5^n\mathbf{S^n_t}$. Por consiguiente, si conocemos las fórmulas de $\mathbf{S^n_t}$, conoceremos las de $\mathbf{H^n_h}$.

A continuación de la serie de $\mathbf{F^n_f}=1+4^n+7^n+10^n+\ldots+f^n$, expresamos las fórmulas desde **n=2** hasta **n=13**.

$\mathbf{F^{n=2}_f=f(6f^2-3f-1)/2}$; $\mathbf{F^{n=3}_f=f(27f^3-18f^2-9f+4)/4}$; $\mathbf{F^{n=4}_f=f(162f^4-135f^3-90f^2+60f+13)/10}$;

$\mathbf{F^{n=5}_f=f(162f^5-162f^4-135f^3+120f^2+3f-20)/4}$;

$\mathbf{F^{n=6}_f=f(1458f^6-1701f^5-1701f^4+1890f^3+819f^2-630f-121)/14}$;

$\mathbf{F^{n=7}_f=f(2187f^7-2916f^6-3402f^5+4536f^4+2457f^3-2520f^2-726f+392)/10}$;

$\mathbf{F^{n=8}_f=f(7290f^8-10935f^7-14580f^6+22680f^5+14742f^4-18900f^3-7260f^2+1093)/10}$;

$\mathbf{F^{n=9}_f=f[39366f^9-65610f^8-98415f^7+174960f^6+132678f^5-204120f^4-98010f^3+105840f^2+29511f+}$
$\mathbf{+(-16180)]/20}$;

$\mathbf{F^{n=10}_f=f(118098f^{10}-216513f^9-360855f^8+721710f^7+625482f^6-1122660f^5-646866f^4+873180f^3+}$
$\mathbf{+324621f^2-266970f-49205)/22}$;

$\mathbf{F^{n=11}_f=f[118098f^{11}-236196f^{10}-433026f^9+962280f^8+938223f^7-1924560f^6+}$
$\mathbf{+(-1293732)f^5+2095632f^4+973863f^3-1067880f^2-295230f+162536]/8}$;

$\mathbf{F^{n=12}_f=f[37200870f^{12}-80601885f^{11}-161203770f^{10}+394053660f^9+426891465f^8-985134150)f^7+}$
$\mathbf{+(-756833220)f^6+143026884f^5+797593797f^4-1093242150f^3-402988950f^2+332792460f+}$
$\mathbf{+61203943]/910}$;

$\mathbf{F^{n=13}_f=f[15943230f^{13}-37200870f^{12}-80601885f^{11}+214938360f^{10}+256134879f^9-656756100f^8+}$
$\mathbf{+(-567624915)f^7+1225944720f^6+797593797f^5-1311890580f^4-604483425f^3+}$
$\mathbf{+665584920f^2+183611829f-10119382]/140}$.

A continuación, expresamos las fórmulas de las sumas de la serie de

$G^n{}_g=2^n+5^n+8^n+11^n+\ldots+g^n$, desde n=2 hasta n=13.

$G^{n=2}{}_g=g(6g^2+3g-1)/2;$ $G^{n=3}{}_g=g(27g^3+18g^2-9g-4)/4;$

$G^{n=4}{}_g=g(162g^4+135g^3-90g^2-60g+13)/10;$

$G^{n=5}{}_g=g(162g^5+162g^4-135g^3-120g^2+39g+20)/4;$

$G^{n=6}{}_g=g(1458g^6+1701g^5-1701g^4-1890g^3+819g^2+630g-121)/14;$

$G^{n=7}{}_g=g(2187g^7+2916g^6-3402g^5-4536g^4+2457g^3+2520g^2-726g-392)/8;$

$G^{n=8}{}_g=g(7290g^8+10935g^7-14580g^6-22680g^5+14742g^4+18900g^3-7260g^2-5880)g+1093)/10;$

$G^{n=9}{}_g=g(39366g^9+65610g^8-98415g^7-174960g^6+132678g^5+204120g^4-98010g^3-105840)g^2+$

$+29511g+16180)/20;$

$G^{n=10}{}_g=g(118098g^{10}+216513g^9-360855g^8-721710g^7+625482g^6+1122660g^5-646866)g^4+$

$+(-873180)g^3+324621g+266970g-49205)/22;$

$G^{n=11}{}_g=g[118098g^{11}+236196g^{10}-433026g^9-962280g^8+938223g^7+1924560g^6-1293732)g^5-+$

$+(-2095632)g+973863g+1067880g-295230g-162536]/8;$

$G^{n=12}{}_g=g[37200870g^{12}+80601885g^{11}-161203770g^{10}-394053660g^9+426891465g^8+$

$+985134150g^7-756833220g^6-1430268840g^5+797593797g^4+1093242150g^3+$

$+(-402988950)g^2-332792460g+61203943]/910;$

$G^{n=13}{}_g=g[15943230g^{13}+37200870g^{12}-80601885g^{11}-214938360g^{10}+256134879g^9+$

$+656756100g^8-567624915g^7-1225944720g^6+797593797g^5+1311890580g^4+$

$+(-604483425)g^3-665584920g^2+183611829g+10119382]/140.$

EXPLICACIÓN Y SOLUCIÓN DE LA SERIE $F_n=1+(1+a)^n+(1+2a)^n+(1+3a)^n+(1+4a)^n+\ldots+f^n$

Si en la fórmula $\mathbf{F_n}$, a=1, 2, 3, 4, 5,…; entonces $\mathbf{F^n{}_{a=1}}=1+2^n+3^n+4^n+\ldots+f^n$; $\mathbf{F^n{}_{a=2}}=1+3^n+5^n+7^n+\ldots+f^n$; $\mathbf{F^n{}_{a=3}}=1+4^n+7^n+10^n+\ldots+f^n$; $\mathbf{F^n{}_{a=4}}=1+5^n+9^n+13^n+\ldots+f^n$; $\mathbf{F^n{}_{a=5}}=1+6^n+11^n+16^n+\ldots+f^n$.

De la investigación anterior, se ha advertido que la primera serie implica una sola serie, que es ella misma. La segunda, dos; la tercera, tres; y las otras implican tantas series según sea el valor de la **a**. Ilustrando lo expresado, cuando **a=1**, solo es posible una serie; si **a=2**, son posibles dos; **a=3**, son posibles tres; y así sucesivamente.

Advertimos que pueden existir tantas variantes de una serie como el valor de la **a**, en tanto número entero positivo, exprese. Por lo que se debe aplicar un procedimiento inductivo para resolver las series que implique el de la **a** en la serie S^n_t.

Procedemos a continuación, a resolver las variantes implicadas en la serie S^n_t, cuando **n=2** y **a=5**. Las variantes de series son:

$F^{n=2}_u=1+6^2+11^2+16^2+\ldots+u^2$; $F^{n=2}_v=2^2+7^2+12^2+17^2+\ldots+v^2$;

$F^{n=2}_w=3^2+8^2+13^2+18^2+\ldots+w^2$; $F^{n=2}_x=4^2+9^2+14^2+19^2+\ldots+x^2$;

$F^{n=2}_y=5^2+10^2+15^2+20^2+\ldots+y^2$.

Para resolver la serie $F^{n=2}_y$, efectuamos la siguiente operación. Designemos que **y=5t**, sustituyendo, tenemos que $F^{n=2}_y=5^2(1+2^2+3^2+4^2+\ldots+t^2)$. Como la serie que está entre paréntesis es $S^{n=2}_t$, entonces $F^{n=2}_y=5^2t(2t^2+3t+1)/6$.

En esta fórmula designemos que **t=r/5**. Sustituyendo resulta que $F^{n=2}_y$ se transforma en $F^{n=2}_r$, y se expresa así: $F^{n=2}_r=r(2r^2+15r+25)/30$.

Asignando los siguientes valores, **r**=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,…; tenemos que $F^{n=2}_r$=1.4, 4.2, 8.8, 15.6, 25, 37.4, 53.2, 72.8, 96.6, 125, 158.4, 197.2, 241.8, 292.6, 241.8,… Cuando la **r** tiene los siguientes valores, **r**=1, 6, 11,…; resulta que $F^{n=2}_r$=1.4, 37.4, 158.4,… Si **r**=2, 7, 12, 17, 22, 27, 32,…; $F^{n=2}_r$=4.2, 53.2, 197.2,…; **r**=3, 8, 13,…; $F^{n=2}_r$=8.8, 72.8, 241.8,…; **r**=4, 9, 14,…; $F^{n=2}_r$= 15.6, 96.6, 292.6,…; r=5, 10, 15,…; $F^{n=2}_r$= 25, 125, 350,…

Según los valores anteriores, aproximamos los valores respectivos de las siguientes fórmulas, $F^{n=2}_u$=1, 37, 158,…; $F^{n=2}_v$=4, 53, 197,…; $F^{n=2}_w$=9, 73, 242,..; $F^{n=2}_x$=16, 97, 293,…; $F^{n=2}_y$=25, 125, 350,…

Se puede observar que $F^{n=2}_r$ expresa valores exactos de $F^{n=2}_y$, cuando **r**=5, 10, 15,… Si **r**=1, 6, 11,…; se obtienen números casi exactos de $F^{n=2}_u$, con una constante, que en este caso es **-0.4**. En **r**=2, 7, 12,…; se obtienen valores casi exactos para $F^{n=2}_v$, con la constante **-0.2**. Cuando **r**=3, 8, 13,…; se logran resultados muy aproximados de $F^{n=2}_w$ con la constante **0.2**. Y si **r**=4, 9, 14,…; se expresan números casi exactos para $F^{n=2}_x$, con una constante de **0.4**.

Efectuando las operaciones requeridas, con las constantes correspondientes, formamos las siguientes fórmulas:

$\mathbf{F^{n=2}_u=[(2r^3+15r^2+25r)/30]-0.4}$; $\mathbf{F^{n=2}_u=(2r^3+15r^2+25r-12)/30}$.

$\mathbf{F^{n=2}_v=[(2r^3+15r^3+25r)/30]-0.2}$; $\mathbf{F^{n=2}_v=(2r^3+15r^2+25r-6)/30}$. Resolviendo directamente, resulta

$\mathbf{F^{n=2}_w=(2r^3+15r^2+25r+6)/30}$.

$\mathbf{F^{n=2}_r=(2r^3+15r^2+25r+12)/30}$.

Para que estas ecuaciones sean exactas, debemos hacer estas designaciones: $\mathbf{r_u}$=5u-4; $\mathbf{r_v}$=5v-3; $\mathbf{r_w}$=5w-2; $\mathbf{r_x}$=5x-1. En consecuencia, efectuando las correspondientes sustituciones y operaciones, resultan las siguientes fórmulas:

$\mathbf{F^{n=2}_u=u(50u^2-45u+1)/6}$; $\mathbf{F^{n=2}_v=v(50v^2-15v-11)/6}$;

$\mathbf{F^{n=2}_w=w(50w^2+15w-11)/6}$; $\mathbf{F^{n=2}_x=x(50x^2+45x+1)/6}$.

Las variantes de series implicadas en $\mathbf{F^n_f}$, cuando **n=2** y **a=10**, son las siguientes:

$\mathbf{F^{n=2}_b=1+11^2+21^2+\ldots+b^2}$; $\mathbf{F^{n=2}_c=2^2+12^2+22^2+32^2+\ldots+c^2}$;

$\mathbf{F^{n=2}_d=3^2+13^2+23^2+33^2+\ldots+d^2}$; $\mathbf{F^{n=2}_i=4^2+14^2+24^2+34^2+\ldots+i^2}$;

$\mathbf{F^{n=2}_j=5^2+15^2+25^2+35^2+\ldots+j^2}$; $\mathbf{F^{n=2}_k=6^2+16^2+26^2+36^2+\ldots+k^2}$;

$\mathbf{F^{n=2}_l=7^2+17^2+27^2+37^2+\ldots+l^2}$; $\mathbf{F^{n=2}_m=8^2+18^2+28^2+38^2+\ldots+m^2}$;

$\mathbf{F^{n=2}_\beta=9^2+19^2+29^2+39^2+\ldots+\beta^2}$; $\mathbf{F^{n=2}_\varepsilon=10^2+20^2+30^2+40^2+\ldots+\varepsilon^2}$.

Efectuando las simplificaciones y operaciones requeridas, las fórmulas de las siguientes series las elaboramos de este modo.

Cuando designamos que en $\mathbf{F^{n=2}_c}$, **c=2u**, tenemos que $\mathbf{F^{n=2}_c}=2^2(1+6^2+11^2+16^2+\ldots+u^2)$; $\mathbf{F^{n=2}_c}=2^2\mathbf{F^{n=2}_u}$; por lo que $\mathbf{F^{n=2}_c=2^2u(50u^2-45u+1)/6}$.

Aplicando el mismo procedimiento, si **i=2v**, $\mathbf{F^{n=2}_i}=2^2(2^2+7^2+12^2+17^2+\ldots+v^2)$; $\mathbf{F^{n=2}_i}=2^2\mathbf{F^{n=2}_v}$; y $\mathbf{F^{n=2}_i=2^2v(50v^2-15v-11)/6}$.

Asignando que **j=5z**, resulta que $\mathbf{F^{n=2}_j}=5^2(1+3^2+5^2+7^2+\ldots+z^2)$; $\mathbf{F^{n=2}_j=5^2z(4z^2-1)/3}$.

Designando **k=2w**, tenemos que $\mathbf{F^{n=2}_k}=2^2(3^2+8^2+13^2+18^2+\ldots+w^2)$; $\mathbf{F^{n=2}_k}=2^2\mathbf{F^{n=2}_w}$. Por consiguiente, $\mathbf{F^{n=2}_k=2^2w(50w^2+15w-11)/6}$.

Si **m=2x**, resulta que $\mathbf{F^{n=2}_m}=2^2(4^2+9^2+14^2+19^2+\ldots+x^2)$; $\mathbf{F^{n=2}_m}=2^2\mathbf{F^2_x}$. Por lo tanto, $\mathbf{F^{n=2}_m=2^2x(50x^2+45x+1)/6}$.

Cuando **ε=10t**, entonces $\mathbf{F^{n=2}_\varepsilon}=10^2(1+2^2+3^2+4^2+\ldots+t^2)$; $\mathbf{F^2_\varepsilon}=\mathbf{10^2S^{n=2}_t}$. Entonces $\mathbf{F^2_\varepsilon=10^2t(2t^2+3t+1)/6}$.

Las fórmulas de las series $\mathbf{F^{n=2}_c}$, $\mathbf{F^{n=2}_i}$, $\mathbf{F^{n=2}_j}$, $\mathbf{F^{n=2}_k}$, $\mathbf{F^{n=2}_m}$ y $\mathbf{F^{n=2}_\varepsilon}$ se han resuelto de esta manera, porque al factorizarse se transforman en otras series cuyas fórmulas ya se han calculado.

Aunque existen otras formas de solución, las fórmulas de las series $\mathbf{F^{n=2}_b}$, $\mathbf{F^{n=2}_d}$, $\mathbf{F^{n=2}_l}$ y $\mathbf{F^{n=2}_\beta}$ y también otras similares, se han resuelto por el procedimiento que se ha aplicado para formar las fórmulas $\mathbf{F^{n=2}_u}$, $\mathbf{F^{n=2}_v}$, $\mathbf{F^{n=2}_w}$ y $\mathbf{F^{n=2}_x}$.

Como en la serie $\mathbf{F^n_f}$ los valores de la **a** pueden ser a=1, 2, 3, 4, 5,…; el número de variantes de series que se crean dependen del número entero positivo del valor de la **a**. Si el valor de la **a** es 5, 10, 100, 1000,...; entonces se forman 5, 10, 100, 1000,… variantes de series. Por consiguiente, las series de variantes que pueden formarse de $\mathbf{F^n_f}$ no tienen límites según el valor creciente de la **a**. Entonces, **¿existe un método por medio del cual se resuelvan teóricamente todas fórmulas de las variantes de series de $\mathbf{F^n_f}$**? Este método es una consecuencia o generalización de los procedimientos que antes, en este texto, se ha aplicado para resolverlas.

La base de la solución de todas las fórmulas de las variantes de series de $\mathbf{F^n_f}$ reside en $\mathbf{S^n_t}$. Como las fórmulas de las series de $\mathbf{S^n_t}$ se resuelven de un modo continuo en su solución técnica, por lo tanto, todas las series de $\mathbf{F^n_t}$ se deben resolver técnicamente.

Según sea el valor de la **a**, tenemos la serie $\mathbf{Q^n_{at}}=a^n+(2a)^n+(3a)^n+(4a)^n+\ldots+(at)^n$;

$\mathbf{Q^n_{at}}=a^n(1+2^n+3^n+4^n+\ldots+t^n)$; $\mathbf{Q^n_{at}}=a^n\mathbf{S^n_t}$.

En la solución general de las fórmulas de la suma de la serie $\mathbf{S^n_t}$, hice una exposición del procedimiento de solución general. Como el número de las integrales no tiene límite, según sea el valor constantemente incrementado del exponente de **n**, entonces la suma de las integrales se incrementan del mismo modo que aumente el exponente del **binomio de Newton**. Es decir que se pueden producir tantos términos como sea el valor de la **n**. Los matemáticos han inventado un procedimiento simbólico de carácter inductivo para expresar una serie que determina el desarrollo de los términos del **binomio de Newton**, según sea el orden matemático del conjunto de la serie. Este procedimiento se aplica a otros semejantes. Fue de este modo como expuse la solución general de fórmula de la suma de la serie $\mathbf{S^n_t}$. La fórmula de la suma de la serie de $\mathbf{S^n_t}$ la expresé así:

$$\mathbf{S^n_t=[t^{n+1}+(n+1)t^n/2+n(n+1)t^{n-1}/12-n(n+1)(n-1)(n+2)t^{n-3}/720+n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)t^{n-5}/30240+ +(-w)t^{n-7}+\ldots+xt]/(n+1)\ (1)}.$$

En la fórmula **(1)** se ha designado que el exponente **n** sea par. Si el exponente fuera impar, el último término de la serie sería $\mathbf{xt^2}$. El término **xt** se puso como positivo, aunque el valor de la **x** puede ser positivo o negativo. El valor de la **x** es positivo si **n/2** es impar; y es negativo si **n/2** es par.

En la fórmula S^n_t, algunos coeficientes de los términos pueden contener decimales o expresarse como cocientes, pero si esos coeficientes se deducen de modo exacto, son completamente válidos. La fórmula de la suma de la serie de Q^n_{at} es $Q^n_{at}=a^nS^n_t$.

Para resolver todas las fórmulas de las variantes de series, según sea el valor de la **a** en una sola fórmula, designemos **t=r/a**. La fórmula Q^n_{at} se transforma en otra que designamos Q^n_r. Por lo que

$$Q^n_r=[r^{n+1} + a(n+1)r^n/2 + a^2n(n+1)r^{n-1}/12 - a^4n(n+1)(n-1)(n-2)r^{n-3}/720 +$$

$$+ a^6n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)r^{n-5}/30240 - a^8wr^{n-7} +\ldots+ a^nxr]/[a(n+1)] \ (2).$$

Los valores de la fórmula Q^n_r, expresan los valores de todas las series implicadas en el valor de la **a**. Para cada serie, la fórmula Q^n_r, se expresa según sean los valores de todas las variantes de series implicadas en el valor de la **a**. Para cada variante de serie, la fórmula Q^n_r proporciona los valores de esas series por cada número que asuma el valor de la **a** en el orden de los valores. Sin embargo, los valores de algunas series serán exactos, y otras serán casi exactas, variando según una constante que puede ser positiva en unas series y negativa en otras. Estas variaciones se han expresado anteriormente. De acuerdo a los valores que se le asignen a la **r** y a la **a**, determinamos las constantes de cada fórmula de variantes de series: $C_p/[a(n+1)]$; $C_q/[a(n+1)]$; $C_s/[a(n+1)]$; $C_w/[a(n+1)]$; $C_x/[a(n+1)]$;…

Cada constante se puede calcular, estableciendo la diferencia de los valores de la fórmula Q^n_r y el primer término de la serie correspondiente implicada en el valor de la **a**. Cuando los valores calculados por la fórmula de la suma de la serie son exactos, la constante es cero.

Como he elaborado un procedimiento técnico de solución de las fórmulas de las sumas de las series, según sean los valores del exponente **n** incrementado regularmente en una unidad, entonces todas las series se resuelven por el procedimiento que se ha aplicado.

Como ejemplo, efectuemos la solución de la serie:

$F^{n=27}_t=1+(1+a)^{27}+(1+2a)^{27}+(1+3a)^{27}+(1+4a)^{27}+\ldots+t^{27}$ y en que el valor de la **a**, como número entero positivo, sea igual o mayor que **1**.

De las series implicadas con el valor de la **a** que nos permita deducir la serie base que exprese los valores de las otras, más las constantes correspondientes es, $F^{n=27}_t=a^{27}(1+2^{27}+3^{27}+4^{27}+\ldots+t^{27})$ **(3)**. Aplicando el procedimiento requerido, tenemos

$$Q^{n=27}_r=r^2[2r^{26}+28ar^{25}+126a^2r^{24}-1365a^4r^{22}+17940a^6r^{20}-207207a^8r^{18}+1988350a^{10}r^{16}+$$

$$+(-15400317)a^{12}r^{14}+93605400a^{14}r^{12}-431511717a^{16}r^{10}+1442785630a^{18}r^8+$$

$$+(-3289147407)a^{20}r^6+4665640980a^{22}r^4-3545461365a^{24}r^2+1077690978a^{26}]/56a \ (4).$$

De los valores sucesivos de la **r**, según sea el valor de la **a**, podemos obtener la ecuación de las variables de cada serie. Y así tenemos que $\mathbf{r_w=aw-(a-1)}$; $\mathbf{r_x=ax-(a-2)}$; $\mathbf{r_p=ap-(a-3)}$; $\mathbf{r_q=aq-(a-4)}$; $\mathbf{r_s=as-(a-5)}$; $\mathbf{r_f=af-(a-6)}$;…

¿**Cómo se debe calcular el valor de la constante de la fórmula de cada variante de serie**? En la fórmula $\mathbf{F^{n=27}{}_w}$ el valor de la variable es $\mathbf{r_w=aw-(a-1)}$. En $\mathbf{Q^{n=27}{}_r}$ debemos designar que **r**=1. Por lo que la expresamos como $\mathbf{Q^{n=27}{}_{r=1}}$. Dado que en la serie $\mathbf{F^{n=27}{}_w}$, el valor de la **r** es 1, entonces el valor de la constante se obtiene mediante esta ecuación: $\mathbf{C_w}+\mathbf{Q^{n=27}{}_{r=1}}=1$; $\mathbf{C_w}=1-\mathbf{Q^{n=27}{}_{r=1}}$. Por lo que $\mathbf{F^{n=27}{}_w}=\mathbf{Q^{n=27}{}_w}+\mathbf{C_w}$; $\mathbf{F^{n=27}{}_w}=\mathbf{Q^{n=27}{}_w}+(1-\mathbf{Q^{n=27}{}_{r=1}})$. Sustituyendo, según el procedimiento requerido, tenemos que

$$\mathbf{F^{n=27}{}_w=[aw-(a-1)]^2\,\{2[aw-(a-1)]^{26} + 28a[aw-(a-1)]^{25} + 126a^2[aw-(a-1)]^{24}+}$$

$$\mathbf{+(-1365a^4)[aw-(a-1)]^{22} +\ldots+ 1077690978/56^a - Q^{27}{}_{r=1}\}}.$$

Las fórmulas de las otras series se obtienen aplicando el mismo procedimiento.

En la serie $\mathbf{F^{n=27}{}_t}$, designemos a=7, entonces la fórmula de la serie $\mathbf{F^{n=27}{}_w}$ es:

$$\mathbf{F^{n=27}{}_w=\{(7w-6)^2[2(7w-6)^{26}+28(7)(7w-6)^{25}+126(7)^2(7w-6)^{24}-1365(7)^4(7w-6)^{22}+}$$

$$\mathbf{+17940(7)^6(7w-6)^{20}-207207(7)^8(7w-6)^{18}+1988350(7)^{10}(7w-6)^{16}-15400317(7)^{12}(7w-6)^{14}+}$$

$$\mathbf{+93605400(7)^{14}(7w-6)^{12}-431511717(7)^{16}(7w-6)^{10}+1442785630(7)^{18}(7w-6)^8+}$$

$$\mathbf{+(-3289147407)(7)^{20}(7w-6)^6+4665640980(7)^{22}(7w-6)^4-3545461365(7)^{24}(7w-6)^2+}$$

$$\mathbf{+1077690978(7)^{26}]/392\} - [2+28(7)+126(7)^2-1365(7)^4+17940(7)^6-207207(7)^8+}$$

$$\mathbf{+1988350(7)^{10}-15400317(7)^{12}+93605400(7)^{14}- 431511717(7)^{16}+1442785630(7)^{18}+}$$

$$\mathbf{+(-3289147407)(7)^{20}+4665640980(7)^{22}-3545461365(7)^{24}+1077690978(7)^{26}]/392}.$$

Las fórmulas de las sumas de las otras series se calculan aplicando igual procedimiento.

Es evidente que los valores de las fórmulas son muy grandes para calculadoras que operan con diez dígitos. Para obviar esta dificultad se requiere de computadoras cuyos programas operen con el número de dígitos necesario.

Resolvamos las series implicadas en la serie $\mathbf{F^{n=9}{}_t}$ en que **a=7**. Aquéllas son: $\mathbf{F^{n=9}{}_w=1+8^9+15^9+22^9+\ldots+w^9}$; $\mathbf{F^{n=9}{}_x=2^9+9^9+16^9+23^9+\ldots+x^9}$; $\mathbf{F^{n=9}{}_p=3^9+10^9+17^9+24^9+\ldots+p^9}$; $\mathbf{F^{n=9}{}_q=4^9+11^9+18^9+25^9+\ldots+q^9}$; $\mathbf{F^{n=9}{}_s=5^9+12^9+19^9+26^9+\ldots+s^9}$; $\mathbf{F^{n=9}{}_f=6^9+13^9+20^9+27+\ldots f^9}$; $\mathbf{F^{n=9}{}_y=7^9+14^9+21^9+28^9+\ldots y^9}$;

En $\mathbf{F^{n=9}{}_y}$, designemos que **y=7t**. Sustituyendo y factorizando resulta que $\mathbf{F^{n=9}{}_y}=7^9(1+2^9+3^9+4^9+\ldots+t^9)$. Como $\mathbf{S^{n=9}{}_t}=1+2^9+3^9+4^9+\ldots+t^9$, entonces $\mathbf{F^{n=9}{}_y=7^9S^{n=9}{}_t}$. Por lo que $\mathbf{F^{n=9}{}_y=7^9t^2(2t^8+10t^7+15t^6-14t^4+10t^2-3)/20}$.

En $F^{n=9}_{y}$ asignemos que **t=r/7**. Sustituyendo y resolviendo convertimos esta fórmula en esta otra: $F^{n=9}_{r}=r^2(2r^8+70r^7+735r^6-33614r^4+1176490r^2-17294403)/140$.

Para calcular la constante C_w, efectuamos la siguiente operación: $F^{n=9}_{r=1}+C_w=1$; $C_w=16150860/140$. Asignando el valor correspondiente de C_w, tenemos

$$F^{n=9}_{w}=[2(7w-6)^{10} + 70(7w-6)^9 + 735(7w-6)^8 - 33614(7w-6)^6 + 1176490(7w-6)^4+$$

$$+(-17294403)(7w-6)^2 + 16150860]/140.$$

Para calcular la constante C_x, efectuamos esta operación: Designamos que **r=2** en la fórmula $F^{n=9}_{r}$, por lo que $F^{n=9}_{r=2}=(-52279020)/140$. Luego construimos esta ecuación, $F^{n=9}_{r=2}+C_x=2^9$. Efectuando la suma, tenemos que $C_x=52350702/140$. Como $r_x=7x-5$, sustituyendo en $F^{n=9}_{r}$ y sumando C_x, resulta

$$F^{n=9}_{x}=[2(7x-5)^{10} + 70(7x-5)^9 + 735(7x-5)^8 - 33614(7x-5)^6 + 1176490(7x-5)^4 - 17294403(7x-5)^2+$$

$$+52350700]/140.$$

Con igual procedimiento calculamos las fórmulas de las otras sumas de series.

$$F^{n=9}_{p}=[2(7p-4)^{10}+70(7p-4)^9+735(7p-4)^8-33614(7p-4)^6+1176490(7p-4)^4-17294403(7p-4)^2+$$

$$+81295920]/140.$$

$$F^{n=9}_{q}=[2(7q-3)^{10}+70(7q-3)^9+735(7q-3)^8-33614(7q-3)^6+1176490(7q-3)^4-17294403(7q-3)^2+$$

$$+81295920]/140.$$

$$F^{n=9}_{s}=[2(7s-2)^{10}+70(7s-2)^9+735(7s-2)^8-33614(7s-2)^6+1176490(7s-2)^4-17294403(7s-2)^2+$$

$$+52350700]/140.$$

$$F^{n=9}_{f}=[2(7f-1)^{10}+70(7f-1)^9+735(7f-1)^8-33614(7f-1)^6+1176490(7f-1)^4-17294403(7f-1)^2+$$

$$+16150860]/140.$$

Desde el punto de vista de la facilidad y por este modo técnico de solución de las fórmulas, no es necesario desarrollar el **binomio de Newton** comprendido en los paréntesis de las fórmulas. Porque en la medida en que los valores del exponente **n** y la variable **a** se incrementen, las operaciones se hacen muy extensas. Sin embargo para mostrarlo, desarrollemos los binomios de los paréntesis de la fórmula $F^{n=9}_{f}$.

$$F^{n=9}_{f}=f[564950498f^9 + 2017680350f^8 + 1124136195f^7 - 2964754800f^6 - 2175800606f^5+$$

$$+2837693880f^4 + 1717507330f^3 - 1395735600f^2 - 525354627f + 210554820]/140.$$

Por conveniencia de comodidad de las operaciones matemáticas y por el modo técnico de solución de las fórmulas, podría ser innecesario desarrollar el binomio. Porque en la medida en que los valores del exponente **n** y los de la variable **a** se incrementen, las operaciones se tornarían muy extensas y complicadas. En este caso, la respuesta a este problema es la solución técnica de elaboración de la fórmula de la suma de las series. En la solución técnica de elaboración de las fórmulas de las sumas de las series, resulta incómodo desarrollar los binomios. A continuación hacemos un comentario sobre la **Tabla 4**.

Los términos de las columnas se calculan casi de igual modo que los de las **Tablas 1ra**, **2da** y **3ra**, y se calculan por un **limitado procedimiento de ensayo y error**. Sin embargo, aquellos que continúan después de la columna doce (**12**) tendrían más o menos una configuración parecida a los términos desde el primero hasta el doce. Las filas que guardan una secuencia exacta comienzan desde la cuarta.

El primer término de cada fórmula se forma multiplicando el término de la **fila B** con su correspondiente de la **fila C**. O sea, multiplicando el segundo término de la columna con el tercero. En la **fila A** hay dos números, el primero indica el denominador de las fórmulas de $\mathbf{S^n{}_t}$; y el segundo, el denominador de la fórmula que se elabora en cada columna.

En la **cuarta columna**, los numeradores de los cocientes de la fila tienen esta sucesión, (3, 4, 5, 6,…)/6. A partir de la **quinta fila** los numeradores siguen esta secuencia: (2, 3, 4, 5, 6,…)/6; 2(2, 3, 4, 5, 6,…)/120, y así sucesivamente, según se formen los cocientes de cada columna.

La técnica de solución general de la fórmula $\mathbf{F^n{}_t=1+(1+a)^n+(1+2a)^n+(1+3a)^n+\ldots+t^n}$ y sus series implicadas o paralelas, es preferible resolverlas de acuerdo a la solución técnica de la fórmula $\mathbf{S^n{}_t}$.

De la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{S^n{}_t}=1+2^n+3^n+4^n+\ldots+t$, siendo **n**=1, 2, 3, 4,…,t, resolví desde **n=4** hasta **n=31**. Según nuestro método técnico de solución, las fórmulas se resuelven de modo continuo, lo que permite elaborar las siguientes.

Como los polinomios de las fórmulas tienen quince términos, podemos elaborar una fórmula general que comprenda los primeros quince términos de sus respectivos polinomios según sea el valor que se le asigne a la **n**.

Supongamos que queremos conocer los primeros quince términos del polinomio de una fórmula de $\mathbf{S^n{}_t}$, y en que **n** sea mayor que **27**.

Según sea el valor del término en cada fila formamos los siguientes términos de acuerdo al valor de la **n**:

$\mathbf{t^{n+1}}$; $\mathbf{(n+1)/2t}$; $\mathbf{n/6t}$; $\mathbf{-(n-1)(n-2)/(2)(30)t^2}$; $\mathbf{-(n-2)(n-3)/(2)(21)t^2}$; $\mathbf{-(n-5)(n-6)/(2)(20)t^2}$;

$-3617(n-13)(n-14)/(2)(71400)t^2$; **$-219335(n-15)(n-16)/(2)(4329549)t^2$**;

$-1222277(n-17(n-18)/(2)(24126850t^2$; **$-4272565(n-19)(n-20)/(2)(84337113)t$**;

$-(236364091)(n-21)(n-22)/(2)(4665640980)t^2$; **$-59871721(n-23)(n-24)/(2)(1181820455)t^2$**.

Los términos del polinomio de la fórmula general lo obtenemos aplicando el mismo procedimiento que utilicé anteriormente para calcular los términos de las fórmulas según la **Tabla 1**. Esta es la fórmula:

$$S^n_t=[t^{n+1} + (n+1)t^n/2 + n(n+1)t/12 - n(n+1)(n-1)(n-2)t^{n-3}/(120)(3!) + n(n+1)(n-1)(\dots)(n-4)t^{n-5}/(252)(5!)+$$
$$+(-n)(n+1)(n-1)(\dots)(n-6)t^{n-7}/(240)(7!) + n(n+1)(n-1)(\dots)(n-8)t^{n-9}/(132)(9!)+$$
$$+(-691)n(n+1)(n-1)(\dots)(n-10)t^{n-11}/(32760)(11!) + n(n+1)(n-1)(\dots)(n-12)t^{n-13}/(12)(13!)+$$
$$+(-3617)n(n+1)(n-1)(\dots)(n-14)t^{n-15}/(8160)(15!) + 43867n(n+1)(n-1)(\dots)(n-16)t^{n-17}/(14364)(17!)+$$
$$+(-174611)n(n+1)(n-1)(\dots)(n-18)t^{n-19}/(6600)(19!) + 77683n(n+1)(n-1)(\dots)(n-20)t^{n-21}/(276)(21!)+$$
$$+(-23636491)n(n+1)(n-1)(\dots)(n-22)t^{n-23}/(65520x23!) + 657931n(n+1)(n-1)(\dots)(n-24)t^{n25}/(12x25!)+$$
$$+(-w)+\dots+x]/(n+1).$$

Como las fórmulas de $\mathbf{S^n_t}$ se van resolviendo consecutivamente según el procedimiento inductivo de la solución técnica, entonces el método técnico de solución nos permite elaborar una solución general de $\mathbf{S^n_t}$.

Si comparamos el cálculo de los términos del polinomio de la demostración general de la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{S^n_t}=1+2^n+3^n+4^n+\dots+t^n$ por medio de las integrales y del **binomio de Newton** con la demostración general, advertiremos que la solución técnica es más sencilla, simple y cómoda.

Cuántas operaciones tan extensas y complicadas se harían para calcular los primeros quince términos de $\mathbf{S^n_t}$ por el método de integrales y el **binomio de Newton**. Además, **nuestro método técnico de solución es una confirmación de la demostración por el procedimiento de integrales para calcular la suma de la serie de $\mathbf{S^n_t}$**.

Las fórmulas de la suma de las series $\mathbf{F^n_w}=1+4^n+7^n+10^n+\dots+w^n$ y $\mathbf{F^n_x}=2^n+5^n+8^n+\dots+x^n$ tienen los mismos términos de las columnas de la **Tabla 4**. Por esa razón no les asigno signos positivos (+) o negativos (-) a los términos.

En las fórmulas de $\mathbf{F^n_w}$, el primer término es positivo, el segundo y el tercero son negativos, el cuarto y el quinto son positivos, el sexto y el séptimo son negativos, y así sucesivamente. En las fórmulas de $\mathbf{F^n_x}$, el primero y segundo términos son positivos, el tercero y cuarto son positivos, y así sucesivamente.

A continuación exponemos la tabla de valores para el cálculo de las fórmulas de $\mathbf{P^n_v}$ según sea el valor par de la **n**.

TABLA 2

2^2v^3	2^4v^5	2^6v^7	2^8v^9	$2^{10}v^{11}$	$2^{12}v^{13}$
$-3/12v^2$	$-10/12v^2$	$-21/12v^2$	$-36/12v^2$	$-55/12v^2$	$-78/12v^2$
	$-7(3)/120v^2$	$-7(10)/120v^2$	$-7(21)/120v^2$	$-7(36)/120v^2$	$-7(55)/120v^2$
		$-31(3)/588v^2$	$-31(10)/588v^2$	$-31(21)/588v^2$	$-31(36)/120v^2$
			$-127(3)/2480v^2$	$-127(10)/2480v^2$	$-127(21)/2480v^2$
				$-2555(3)/5029v^2$	$-2555(10)/50292v^2$
					$-1414477(3)/27900600v^2$

$2^{14}v^{15}$	$2^{16}v^{17}$	$2^{18}v^{19}$
$-105/12v^2$	$-136/12v^2$	$-171/12v^2$
$-7(78)/120v^2$	$-7(105)/120v^2$	$-7(136)/120v^2$
$-31(55)/588v^2$	$-31(78)/588v^2$	$-31(105)/588v^2$
$-127(36)/2480v^2$	$-127(55)/2480v^2$	$-127(78)/2480v^2$
$-2555(21)/50292v^2$	$-2555(36)/50292v^2$	$-2555(55)/50292v^2$
$-1414477(10)/27900600v^2$	$-1414477(21)/27900600v^2$	$-1414477(36)/27900600v^2$
$-286685(3)/5657908v^2$	$-286685(10)/5657908v^2$	$-286685(21)/5657908v^2$
	$-16931177(3)/334192800v^2$	$-16931177(10)/334192800v^2$
		$-28748457785(3)/567465328332v^2$

TABLA 3

$2v^4$	2^3v^6	2^4v^8	2^8v^{10}	2^9v^{12}	$2^{12}v^{14}$
$-6/12v^2$	$-15/12v^2$	$-28/12v^2$	$-45/12v^2$	$-66v/12v^2$	$-91/12v^2$
	$-7(6)/120v^2$	$-7(15)/120v^2$	$-7(28)/120v^2$	$-7(45)/120v^2$	$-7(66)/120v^2$
		$-31(6)/588v^2$	$-31(15)/588v^2$	$-31(28)/588v^2$	$-31(45)/588v^2$
			$-127(6)/2480v^2$	$-127(15)/2480v^2$	$-127(28)/2480v^2$
				$-2555(6)/50292v^2$	$-2555(15)/50292v^2$

		$-1414477(6)/27900600v^2$
$2^{16}v^{15}$	$2^{16}\ v^{18}$	$2^{17}\ v^{20}$
$-120/12v^2$	$-153/12v^2$	$-190/12v^2$
$-7(91)/120v^2$	$-7(120)/120v^2$	$-7(153)/120v^2$
$-31(66)/588v^2$	$-31(91)/588v^2$	$-31(120)/588v^2$
$-127(45)/2480v^2$	$-127(66)/2480v^2$	$-127(91)/2480v^2$
$-2555(28)50292v^2$	$-2555(45)/50292v^2$	$-2555(66)/50292v^2$
$-1414477(15)/27900600v^2$	$-1414477(28)/27900600v^2$	$-1414477(45)/27900600v^2$
$-286685(6)/5657908v^2$	$-286685(15)/5657908v^2$	$-286685(28)/5657908v^2$
	$-16931177(6)/334192800v^2$	$-16931177(15)/334192800v^2$
		$-2874845775(6)/567465328332v^2$

TABLA 4

A. 6-2	4-4	30-10	12-4	42-14	24-8
B. 2	1	2	2	2	1
C. $3w^3$	3^3w^4	3^4w^5	3^4w^6	3^6w^7	3^7w^8
3/6w	4/6w	5/6w	6/6w	7/6w	8/6w
2/6w	3/6w	46/w	5/6w	6/6w	7/6w
	2(2)/9w	2(3)/9w	2(4)/9w	2(5)/9w	2(6)/9w
		13(2)/120w	13(3)/120w	13(4)/120w	13(5)/120w
			10(2)/39w	10(3)/39w	10(4)/39w
				121(2)/1260w	121(3)/1260w
					98(2)/363w

90-10	20-20	66-22
10	2	2
3^6w^9	3^9w^{10}	$3^{10}w^{11}$

9/6w	10/6w	11/6w
8/6w	9/6w	10/6w
2(7)/9w	2(8)/9w	2(9)/9w
13(6)/120w	13(7)/120w	13(8)/120w
10(5)/39w	10(6)/39w	10(7)/39w
121(4)/1260w	121(5)/1260w	121(6)/1260w
98(3)/363w	98(4)/363w	98(5)/363w
1093(2)/11760w	1093(3)/11760w	1093(4)/11760
	8090(2)/29511w	8090(3)/29511w
		9841(2)/10678

El análisis e investigación que hice sobre los coeficientes de las fórmulas de $\mathbf{S^n_t}$, desde **n=2** hasta **n=13**, me permitió elaborar un procedimiento de solución técnica de las fórmulas $\mathbf{F^n_t}$. Además, puede resolver de modo continuo las fórmulas de estas series cuando **n**=28, 29, 30 y 31. Las soluciones para encontrar las fórmulas de la suma de dichas series, mediante este procedimiento, son ilimitadas.

Es extraño que este procedimiento técnico de solución de las fórmulas de **S** y **F** carezca de relación con el **método de integrales parciales** y el **binomio de Newton**, aunque los coeficientes de los términos tengan de modo parcial la estructura de los términos del producto de dicho binomio.

Las fórmulas que he presentado en este ensayo de matemática pueden probarse con una calculadora científica que opere con diez dígitos o más, y que disponga de programación.

No obstante de que esta investigación es un estudio muy especializado sobre las series, antes enunciadas, también tiene un fin didáctico y de divulgación de las fórmulas desarrolladas. Tal vez algunos profesores, amantes y curiosos de las matemáticas desconozcan las fórmulas que he expuesto en este ensayo, y podrían interesarse en conocerlas.

QUINTA PARTE

EXPLICACIÓN Y SOLUCIÓN DE LA SERIE $\mathbf{Z^n_{T=t+1}=1+3^n+6^n+10^n+15^n+21^n+28^n+\ldots+t^n}$

En la serie $\mathbf{Z^n_{T=t+1}}$ la diferencia de los términos sucesivos aumenta una unidad con relación a la anterior consecutiva. Para calcular la fórmula de la suma de los términos de la serie $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$, designemos que $\mathbf{A^9_T=[T(T+1)/2]^9dT}$.

Desarrollando el binomio y efectuando las operaciones respectivas, resulta que

$\mathbf{[T(T+1)/2]^9dT=(T^{18}+9T^{17}+36T^{16}+84T^{15}+126T^{14}+126T^{13}+84T^{12}++36T^{11}+9T^{10}+T^9)dT/512}$.

Para facilitar el procedimiento que nos permita calcular la fórmula de la serie $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$, multiplicamos el numerador y el denominador de $\mathbf{A^9_T}$ por 3x5x7x17x19. Por lo que

$\mathbf{A^9_T=(33915T^{18}+305235T^{17}+1220940T^{16}+2848860T^{15}+4273290T^{14}+4273290T^{13}+2848860T^{12}+}$

$\mathbf{+1220940T^{11}+305235T^{10}+33915T^9)dT/17364480}$ **(1)**.

En el cálculo de los término de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$, aplicamos el método de ***Cauchy***, pero modificamos el procedimiento.

1. El **primer término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$, es $\int\mathbf{33915T^{18}dT/17364480}$. Integrando, resulta $\mathbf{1785T^{19}/17364480}$.

2. Del término $\mathbf{1785T^{19}/17364480}$ el valor de la **T** se aumenta en una unidad, se resta el término y la diferencia se multiplica por **dT**; $[1785(T+1)^{19}-1785T^{19}]\mathbf{dT}/17364480$. Efectuando la operación correspondiente, tenemos

$(33915T^{18}+305235T^{17}+1729665T^{16}+6918660T^{15}+20755980T^{14}+48430620T^{13}+89942580T^{12}+$
$+134913870T^{11}+164894730T^{10}+164894730T^9+134913870T^8+89942580T^7+48430620T^6+$
$+20755980T^5+6918660T^4+1729665T^3+305235T^2+ +33915T+1785)\mathbf{dT}/17364480$ **(2)**.

3. La integral de la diferencia de los terceros términos de **(1)** y **(2)**, es $\int\mathbf{(1220940T^{16}-1729665T^{16})dT/17364480}$;
$\int\mathbf{-508725T^{16}dT/17364480=-29925T^{17}/17364480}$. Este es el **segundo término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

Del término $\mathbf{-29925T^{17}/17364480}$ incrementamos el valor de la **T** en una unidad, restamos el término y multiplicamos la diferencia por **dT**. El desarrollo de esta operación $[(-29925(T+1)^{17}-(29925)T^{17}]\mathbf{dT}/17364480$ es

$-(508725T^{16}+4069800T^{15}+20349000T^{14}+71221500T^{13}+185175900T^{12}+370351800T^{11}+$
$+581981400T^{10}+727476750T^9+727476750T^8+5819814000T^7+370351800T^6+185175900T^5+$
$+71221500T^4+20349000T^3+4069800T^2+508725T+29925)\mathbf{dT}/17364480$ **(3)**.

De suma de **(3)**+**(2)**, tenemos

$(33915T^{18}+305235T^{17}+1220940T^{16}+2848860T^{15}+4069800T^{14}-22790880T^{13}-95233320)T^{12}+$
$+(-235437930)T^{11}-417086670T^{10}-562582020T^9-592562880T^8-492038820T^7-391921180T^6+$
$+(-164419920)T^5-64302840T^4-18619335T^3-3764565T^2-474810T-28140)\mathbf{dT}/17364480$ **(4)**.

A continuación, expondremos las operaciones pertinentes para calcular los términos siguientes de la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$. 4.**∫(4273290406980)$\mathbf{T^{14}}$dT/17364480**=**257754$\mathbf{T^{15}}$/17364480**. Este es el **tercer término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

[257754(T+1)^{15}-257754T^{15}]**dT**/17364480=

=(3866310T^{14}+27064170T^{13}+117278070T^{12}+351834210T^{11}+714035262T^{10}+1290058770T^{9}+ +1658646990T^{8}+1658646990T^{7}+1290058770T^{6}+774035262T^{5}+351834210T^{4}+17278070T^{3}+ +27064170T^{2}+3866310T+257754)**dT**/17364480 **(5)**.

(5)+**(4)**=33915T^{18}+…+4273290T^{14}+4273290T^{13}+22044750T^{12}+116396280T^{11}+356948592T^{10}+ 727476750T^{9}+1066084110T^{8}+1166608170T^{7}+968137590T^{6}+609615342T^{5}+287531370T^{4}+ +98658735T^{3}+23299605T^{2}+3391500T+229614)**dT**/17364480 **(6)**.

5. ∫(2848860-22044750)$\mathbf{T^{12}}$dT/17364480=(-19195890/13)$\mathbf{T^{13}}$/17364480. Este es el **cuarto término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

a. [-(19195890/13)(T+1)^{13}-(-19195890/13)T^{13}]**dT**/17364480=

-(19195890T^{12}+115175340T^{11}+422309580T^{10}+1055773950T^{9}+ +1900393110T^{8}+2533857480T^{7}+2533857480T^{6}+1900393110T^{5}+1055773950T^{4}+ +422309580T^{3}+115175340T^{2}+19195890T+19195890/13)**dT**/17364480 **(7)**.

b.**(7)**+**(6)**=[33915T^{18}+…+2848860T^{12}+1220940T^{11}-65360988T^{10}-328297200T^{9}-834309000T^{8}+

+(-1367249310)T^{7}-1565719890T^{6}-1290777768T^{5}-768242580T^{4}-323650845)T^{3}+

+(-91875735)T^{2}-15804390T-16210908/13]**dT**/17364480 **(8)**.

6. ∫[305235-(-65360988)]$\mathbf{T^{10}}$dT/17364480=65666223$\mathbf{T^{11}}$/(11)(17364480). Este es **quinto término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

a. [(65666223/11)(T+1)^{11}-(65666223/11)T^{11}]**dT**/17364480=

+65666223T^{10}+328331115T^{9}+984993345T^{8}+1969986690T^{7}+2757981366T^{6}+2757981366T^{5}+ +1969986690T^{4}+984993345T^{3}+328331115T^{2}+65666223T+ +65666223/11]**dT**/17364480 **(9)**.

b. **(9)**+**(8)**=[33915T^{18}+…+305235T^{10}+33915T^{9}+150684345T^{8}+602737380T^{7}+1192261476T^{6}+

+1467203598T^{5}+201744110T^{4}+661342500T^{3}+236455380T^{2}+49861833T+

+675340911/143]**dT**/17364480 **(10)**.

7. ∫(0-150684345$\mathbf{T^{8}}$)dT/17364480=∫-150684345$\mathbf{T^{8}}$dT=-16742705$\mathbf{T^{9}}$/17364480. Este es el **sexto término** de la fórmula de la suma de la serie $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

a. $[-16742705(T+1)^9-(-16742705T^9)]$**dT**/17364480=

$-(150684345T^8+602737380T^7+1406387220T^6+2109580830T^5+2109580830T^4+$

$+1406387220T^3+602737380T^2+150684345T+16742705)$**dT**/17364480 **(11)**.

b.**(11)**+**(10)=**$\mathbf{[33915T^{18}+\ldots+33915T^9-214125744T^6-642377232T^5-907836720T^4-745044720T^3+}$

$\mathbf{+(-366282000)T^2-100822512T-171886590/143]dT/17364480}$ **(12)**.

8. $\mathbf{\int[0-(-214125744)]T^6dT/17364480=\int 214125744T^6dT/17364480=30589392T^7/17364480}$. Este es el **séptimo término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

a. $30589392(T+1)^7-30589392T^7=(214125744T^6+642377232T^5+1070628720T^4+$
$+1070628720T^3+642377232T^2+214125744T+30589392)$**dT**/17364480 **(13)**.

b. **(13)+(12)**=$(33915T^{18}+\ldots+33915T^9+162792000T^4+325584000T^3+276095232T^2+$
$+113303232T+2655417152/143)$**dT**/17364480 **(14)**.

9. $\mathbf{\int(0-162792000)T^4dT/17364480=\int -162792000T^4dT/17364480=}$

$\mathbf{-32558400T^5/17364480}$. Este es el **octavo término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

a. $[-325584000(T+1)^5-(-325584000)T^5]dT/17364480=[(162792000T^4+325584000T^3+$
$+3325584000T^2+162792000T+32558400)]$**dT**/17364480 **(15)**.

b. **(15)**+**(14)**=$[33915T^{18}+\ldots+33915T^9-49488768T^2-49488768T+$
$+(-2000434048)/143]dT/17364480$ **(16)**.

10. $\mathbf{\int[0-(-49488768)]T^2dT/17364480=\int 49488768T^2dT/17364480=16496256T^3/17364480}$. Este es el **noveno término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

a. $[16496256(T+1)^3-16496256T^3]$**dT**/17364480=$(49488768T^2+49488768T+$
$+16496256)$**dT**/17364480 **(17)**.

b. **(17)**+**(16)**=$(33915T^{18}+\ldots+33915T^9+\ldots+358530560/143)$**dT**/17364480 **(18)**.

c. **10**. $\mathbf{\int(0-358530560/143)dT/17364480=(-358530560T/143)/17364480}$. Este es el **décimo término** de la fórmula de $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$.

a. $[(-358530560)(T+1)/143-(-358530560)T/143]$**dT**/17364480=
=$(-358530560/143)$**dT**/17364480 **(19)**.

b. **(19)**+**(18)**=$(33915T^{18}+\ldots+4273290T^{14}+4273290T^{13}+\ldots+33915T^9)$**dT**/17364480 **(20)**.
La ecuación **(20)** es exactamente igual a la **(1)**, por lo que éste es el final de las operaciones para calcular la fórmula de la suma de la serie.

Una vez calculados los términos de la fórmula de la suma de la serie, efectuamos las operaciones requeridas para eliminar los denominadores prescindibles de dichos términos. Y procedemos a formarla. Por consiguiente

$$\mathbf{Z^9_{T=t+1}=T[255255T^{18}-4279275T^{16}+36858822T^{14}-211154790T^{12}+853660899T^{10}}$$

$$\mathbf{+(-2394206815)T^8+4374283056T^6-4655851200T^4+2358964608T^2+}$$

$$\mathbf{+(-358530560)]/2483120640 \quad (21)}.$$

Dado que **T=t+1**, si **T=1**, entonces **t=0**. Como el valor de la **t** corresponde al término en que se calcula la suma de la serie $\mathbf{Z^9_{T=t+1}}$, por lo tanto la fórmula de la serie debe expresarse del siguiente modo:

$$\mathbf{Z^9_{(t+1)}=(t+1)[255255(t+1)^{18}-4279275(t+1)^{16}+36858822(t+1)^{14}-211154790(t+1)^{12}+}$$

$$\mathbf{+853660899(t+1)^{10}-2394206815(t+1)^8+4374283056(t+1)^6-4655851200(t+1)^4+}$$

$$\mathbf{+2358964608(t+1)^2-358530560]/2483120640 \quad (22)}.$$

Aplicando la misma metodología, calculamos las siguientes fórmulas de las sumas de los términos de la serie $\mathbf{Z^n_t=1+3^n+6^n+10^n+15^n+\ldots+t^n}$, cuando **n=2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8**.

$\mathbf{Z^2_t=t(3t^4+15t^3+25t^2+15t+2)/60}$; $\mathbf{Z^3_t=t(15t^6+105t^5+273t^4+315t^3+140t^2-8)/840}$;

$\mathbf{Z^4_t=t(35t^8+315t^7+1110t^6+1890t^5+1491t^4+315t^3-140t^2+24)/5040}$;

$\mathbf{Z^5_t=t(63t^{10}+693t^9+3080t^8+6930t^7+7887t^6+3465t^5-462t^4+616t^2-96)/22176}$;

$\mathbf{Z^6_t=t(1155t^{12}+15015t^{11}+80535t^{10}+225225t^9+335335t^8+225225t^7+19305t^6+15015t^5+}$

$\mathbf{+78078t^4-40040t^2+6112)/960960}$;

$\mathbf{Z^7_t=t(429t^{14}+6435t^{13}+40425t^{12}+135135t^{11}+248703t^{10}+225225t^9+63635t^8+45045t^7+}$

$\mathbf{+140712t^6-144144t^4+73216t^2-11163)/823680}$;

$\mathbf{Z^8_t=t(6435t^{16}+109395t^{15}+787644t^{14}+3063060t^{13}+6715170t^{12}+7657650t^{11}+3604068t^{10}+}$

$\mathbf{+3063060t^9+8083075t^8+109395t^7-13244088t^6+14119248t^4-7156864t^2+}$

$\mathbf{+1087872)/28005120}$.

A continuación exponemos las fórmulas de las sumas de los términos de la serie

$\mathbf{Y^n_t=1+4^n+10^n+20^n+35^n+56^n+84^n+\ldots+t^n}$, cuando **n=2 y 3**.

$\mathbf{Y^2_t=t(10t^6+105t^5+427t^4+840t^3+805t^2+315t+18)/2520}$;

$\mathbf{Y^3_t=t(4t^8+60t^7+375t^6+1260t^5+2442t^4+2700t^3+1535t^2+300t-36)/8640}$.

PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR SERIES CAUCHYANAS COMPLEJAS

Para elaborar las fórmulas, en ***primer lugar***, hay que determinar la ecuación que exprese la base de la potencia de los términos de la serie. En ***segundo lugar***, la ecuación se debe elevar a la **n** potencia según sea el valor del exponente de la serie. En ***tercer lugar***, se aplica el ***método de Cauchy***. En ***cuarto lugar***, el procedimiento para calcular los términos de la fórmula se continúa tal como lo he aplicado para calcular la **(20)**.

La ecuación para determinar los términos de la base de las potencias de las siguientes series son:

$\mathbf{T(T+1)/2=1+3^n+6^n+10^n+\ldots+t^n}$;

$\mathbf{T(T^2+3T+2)/6=1+4^n+10^n+20^n+\ldots+t^n}$;

$\mathbf{T(T^3+6T^2+11T+6)/24=1+5^n+15^n+35^n+\ldots+t^n}$;

$\mathbf{T(T^4+10T^3+35T^2+50T+24)/120=1+6^n+21^n+56^n+\ldots+t^n}$;

$\mathbf{T(T^5+15T^4+85T^3+225T^2+274T+120)/720=1+7^n+28^n+84^n+\ldots+t^n}$;

$\mathbf{T(T^6+21T^5+175T^4+735T^3+1624T^2+1764T+720)/5040=1+8^n+36^n+120^n+\ldots+t^n}$;

$\mathbf{T(T^7+28T^6+322T^5+1960T^4+6769T^3+13132T^2+13068T+5040)/40320=1+9^n+45^n+165^n+\ldots+t^n}$;

$\mathbf{T(T^8+36T^7+546T^6+4536T^5+22449T^4+67284T^3+118124T^2+109584T+40320)/362880=}$

$\mathbf{=1+10^n+55^n+220^n+\ldots+t^n}$.

Las fórmulas de dichas series se calculan según el procedimiento indicado.